Ἐκ τούτου δ' ἐξηγεῖται τὸ λάθος, εἰς ὃ ἤχθη ὁ Wertheim παραδεχθεὶς ὅτι δι' ὅλα τὰ μέταλλα $\mu = \frac{1}{3}$.

ΓΕΩΡΓΙΟΣ Β. ΓΡΑΒΑΡΗΣ
ὑπολοχαγὸς τοῦ Μηχανικοῦ καὶ καθηγητὴς τῆς Ἐφηρμοσμένης Μηχανικῆς παρὰ τῇ Σχολῇ τῶν Εὐελπίδων.

ΣΥΜΒΟΛΗ
ΕΙΣ ΤΗΝ
ΘΕΩΡΙΑΝ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Εἰσαγωγή.

Ἡ ἔννοια τῆς συναρτήσεως εἶναι μία τῶν θεμελιωδεστάτων ἐννοιῶν τῆς Μαθηματικῆς. Δύο κυρίως γενικὰ γεγονότα ἐμφανίζονται καὶ ἐξεγείρουσιν εἰς ἔρευναν τὸ ἡμέτερον πνεῦμα: αἱ πολλαὶ καὶ ποικίλαι μεταβολαὶ τῶν αἰσθητῶν ὄντων ἀφ' ἑνὸς καὶ ἀφ' ἑτέρου ἡ κατὰ τὸ μᾶλλον καὶ ἧττον ἀμοιβαία τῶν μεταβολῶν τούτων ἐξάρτησις. Ἀφορῶσι δὲ αἱ μεταβολαὶ αὗται οὐ μόνον εἰς τὸν ὑλικόν, ἀλλὰ καὶ εἰς αὐτὸν τὸν ψυχικὸν κόσμον, ὧν ἄπειρα παραδείγματα παρέχει ἡ ἡμετέρα νόησις. Ἡ δὲ Μαθηματικὴ ἀσχολεῖται ἰδίᾳ περὶ τὴν ἔννοιαν τῶν ποσῶν ὡς ἀριθμητῶν ἢ μετρητῶν, ὡς σταθερῶν ἢ μεταβλητῶν, ὡς συνεχῶν ἢ ἀσυνεχῶν, καὶ τῆς ἀμοιβαίας αὐτῶν ἐξαρτήσεως. Τὰ κατ' ἐξοχὴν μεταβλητὰ συνεχῆ ποσὰ εἶναι ὁ χῶρος καὶ ὁ συναφὴς αὐτῷ χρόνος. Ἐννοεῖται δ' οἴκοθεν, ὅτι μεταβλητή τις ποσότης δύναται νὰ ἐξαρτᾶται ἐκ πολλῶν μεταβλητῶν ποσοτήτων οὖσα συνάρτησις αὐτῶν. Αἱ μαθηματικαὶ συναρτήσεις εἶναι πολλαὶ καὶ ποικίλαι ὑπαγόμεναι εἰς δύο μεγάλας κατηγορίας: εἰς τὰς ἀλγεβρικὰς καὶ ὑπερβατικὰς συναρτήσεις. Ἡ γενικὴ σπουδὴ τῶν μαθηματικῶν συναρτήσεων συνδέεται ἀναποσπάστως πρὸς τὴν ἔννοιαν τῆς συνεχείας καὶ τῆς συγκλίσεως καθόλου πρὸς πεπερασμένον ὅριον. Τῇ δὲ σπουδῇ ταύτῃ ἐπικουρεῖ καὶ ὁ λογισμὸς τῶν ἀπειροστῶν, τὸ σπουδαιότατον τοῦτο ὄργανον τῆς μαθηματικῆς ἐρεύνης, οὗ ἐποιεῖτο ἤδη χρῆσιν ὁ Ἀρχιμήδης, ὡς ἐξάγεται καταφανῶς ἔκ τινος νεωστὶ εὑρεθέντος ἔργου αὐτοῦ ἀπευθυνομένου πρὸς Ἐρατοσθένη.

Αἱ μαθηματικαὶ συναρτήσεις καθόλου καθορίζονται διὰ πολλῶν καὶ ποικίλων ἰδιωμάτων ἢ ἀνωμαλιῶν ἢ διακλαδώσεων αὐτῶν προερχομένων καὶ ἐκ τῆς ἐρεύνης ἀντιστοίχων διαφορικῶν ἐξισώσεων: στενὴ ἄρα ἡ συγγένεια τῆς γενικῆς θεωρίας τῶν συναρτήσεων πρὸς τὴν θεωρίαν τῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων· πρὸς πᾶσαν ἀνάπτυξιν ταύτης ἀντιστοιχεῖ ἀνάλογος ἀνάπτυξις ἐκείνης. Ὑπὸ δὲ τὴν ἔποψιν ταύτην ἡ λέξις ὁλοκλήρωσις δὲν ἔχει τὴν αὐτήν, ἣν καὶ ἐν τῷ ὁλοκληρωτικῷ λογισμῷ σημασίαν. Ἐκ πρώτης δὲ ὄψεως φαίνεται, ὅτι αἱ καθαραὶ αὗται μαθηματικαὶ θεωρίαι εἶναι ὅλως ἀνεφάρμοστοι ἐν τῇ πράξει. Ἐν τούτοις ἡ σπουδὴ τῶν νέων τούτων συναρτήσεων καὶ δὴ τῶν *ἐλλειπτικῶν* εἶναι σπουδαία καὶ ὠφέλιμος οὐ μόνον ἐν τῇ καθαρᾷ, ἀλλὰ καὶ ἐν τῇ ἐφηρμοσμένῃ Μαθηματικῇ.

Κατὰ τὴν σπουδὴν οἱουδήποτε φυσικοῦ νόμου πρόκειται ἐν γένει περὶ τοῦ καθορισμοῦ τοῦ τρόπου, καθ' ὃν μεταβάλλεται ποσόν τι, ὅταν ἄλλα ποσὰ μεταβάλλωνται ὡσαύτως. Ἐν ἄλλαις λέξεσιν οἱ μὲν φυσικοὶ νόμοι ἐκφράζονται διὰ φυσικῶν συναρτήσεων, ἡ δὲ ἐπ' αὐτῶν ἐφαρμογὴ τῶν μεθόδων τῆς Μαθηματικῆς σκοπεῖ τὴν τροπὴν τῶν φυσικῶν τούτων συναρτήσεων εἰς μαθηματικὰς τοιαύτας. Κατορθοῖ δὲ τοῦτο ἐν γένει ἡ Μαθηματικὴ διὰ τῶν διαφόρων μεθόδων παρεμβολῆς. Τὸ δὲ θέμα τοῦτο δὲν κέκτηται εἰσέτι τὴν γενικὴν αὐτοῦ μορφήν· φαίνεται, ὅτι καὶ ἐνταῦθα ἀπαιτεῖται ἡ ἐπέκτασις τῆς γενικῆς θεωρίας τῶν συναρτήσεων.

Ἐν τοῖς ἑπομένοις γίνεται ἀπόπειρα ἀποδείξεως τῶν σχέσεων τῆς θεωρίας τοῦ βαρυκεντρικοῦ λογισμοῦ πρὸς τὴν θεωρίαν τῶν ἀλγεβρικῶν ἐξισώσεων, τῶν ἀκεραίων καθόλου συναρτήσεων, τῶν γραμμικῶν ἐν γένει διαφορικῶν ἐξισώσεων καὶ τῶν τριγωνομετρικῶν σειρῶν. Ἡ σπουδαιότης τῶν σειρῶν τούτων, αἵτινες εἰσήχθησαν εἰς τὴν Ἀνάλυσιν διὰ τῆς λύσεως προβλημάτων τῆς Μηχανικῆς καὶ μαθηματικῆς Φυσικῆς ἀνεκαλύφθη διά τινος παρατηρήσεως ὑπὸ Fourier, καθ' ἣν αἱ σειραὶ αὗται εἶναι ἱκαναὶ πρὸς παράστασιν οἱασδήποτε συναρτήσεως μιᾶς μεταβλητῆς ἐν τῷ διαστήματι $(-\pi \ldots +\pi)$. Περὶ τῶν σειρῶν τούτων πολλὰ ὑπὸ πολλῶν ἐγράφησαν ἔργα.

α) Βαρυκεντρικὸς λογισμός.

Ὡς γνωστόν, πολλάκις ἡ Μηχανικὴ ἔρχεται ἐπίκουρος τῇ Γεωμετρίᾳ πρὸς εὕρεσιν καὶ ἀπόδειξιν πολλῶν γεωμετρικῶν ἀληθειῶν καὶ ἰδίᾳ διὰ τῆς θεωρίας τῆς εὑρέσεως τοῦ κέντρου βάρους οἱουδήποτε σώματος. Ἤδη ὁ Ἀρχιμήδης ἐφήρμοσε τὴν θεωρίαν τοῦ κέντρου βάρους ἐν ταῖς γεωμετρικαῖς αὐτοῦ ἐρεύναις· εἶτα δὲ οἱ Πάππος, L'Huilier, Carnot, Möbius, Steiner κλ.

Πᾶν σύστημα ὑλικῶν σημείων *ἓν καὶ μόνον* κέκτηται κέντρον βάρους. Ἐντεῦθεν δὲ συνάγεται, ὅτι *τρία* οἱαδήποτε μόνιμα σημεῖα ἐπιπέδου δύνανται νὰ ἔχωσι τοιαῦτα βάρη, ὥστε δεδομένον τέταρτον σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου νὰ ἦναι τὸ κέντρον τοῦ βάρους αὐτῶν καὶ ἑπομένως ὁρίζεται καὶ διὰ τῆς μεθόδου ταύτης ἡ θέσις οὗτινος δήποτε σημείου ἐν τῷ ἐπιπέδῳ. Καθ' ὅμοιον τρόπον ὁρίζεται ἡ θέσις παντὸς σημείου ἐν τῷ χώρῳ διὰ *τεσσάρων* μονίμων σημείων μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ κειμένων.

Ἐὰν δὲ τὰ βάρη (οἱ συντελεσταὶ) τῶν ἐν λόγῳ τριῶν ἢ τεσσάρων μονίμων σημείων ἦναι μεταβλητά, συναρτήσεις μιᾶς μεταβλητῆς, τὸ κέντρον τοῦ βάρους αὐτῶν εἶναι εὐθεῖα μὲν γραμμὴ (ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ἢ τῷ χώρῳ), ὅταν οἱ συντελεσταὶ ἦναι γραμμικαὶ συναρτήσεις τῆς μεταβλητῆς, δευτεροβάθμιος δὲ γραμμή, ὅταν οἱ συντελεσταὶ ἦναι δευτεροβάθμιοι συναρτήσεις τῆς μεταβλητῆς κλ. Ὅταν δὲ οἱ συντελεσταὶ τῶν τεσσάρων μονίμων σημείων τοῦ χώρου ἦναι συναρτήσεις δύο μεταβλητῶν, τὸ κέντρον τοῦ βάρους αὐτῶν εἶναι ἐπιφάνεια ἐπίπεδος, δευτεροβάθμιος κλ., ἐὰν οἱ συντελεσταὶ ἦναι συναρτήσεις γραμμικαί, δευτεροβάθμιοι κλ.

Ὅταν, ὡς ἀνωτέρω, ὁρίζωνται τὰ σημεῖα σχήματός τινος διὰ τῶν συντελεστῶν τῶν τριῶν ἢ τεσσάρων μονίμων σημείων, ὑφίστανται πᾶσαι αἱ διὰ τῶν συντελεστῶν τούτων ἐκφραζόμεναι σχέσεις καὶ ἐν οἱῳδήποτε ἄλλῳ σχήματι κατασκευαζομένῳ διὰ τῶν αὐτῶν συντελεστῶν ὡντινων δήποτε ἄλλων μονίμων σημείων. Πρόδηλον δέ, ὅτι δύο τοιαῦτα σχήματα δὲν εἶναι ὅμοια, ἀλλ' ἔχουσι *γεωμετρικὴν συγγένειαν* ἐκδηλουμένην διὰ τῆς ἐννοίας τῆς *ὁμογραφίας* καὶ τῶν μερικῶν περιπτώσεων αὐτῆς (σκηνογραφίας, ἀναρμονικοῦ λόγου, γεωμετρικοῦ δικτύου κλ.).

Μία τῶν θεμελιωδῶν προτάσεων τοῦ βαρυκεντρικοῦ λογισμοῦ εἶναι καὶ ἡ ἑπομένη. Δοθέντων ἐν τῷ χώρῳ $\mu+1$ σημείων

$$P_0,\ P_1,\ P_2,\ \ldots\ldots,\ P_\mu$$

πρὸς ἃ ἀντιστοιχοῦσιν οἱ συντελεσταὶ (μᾶζαι, βάρη)

$$A_0,\ A_1,\ A_2,\ \ldots\ldots,\ A_\mu$$

οἱοιδήποτε (θετικοὶ ἢ ἀρνητικοί), ὑπάρχει πάντοτε σημεῖόν τι K τοιοῦτον, ὥστε

$$1)\quad A_0 . KP_0 + A_1 . KP_1 + A_2 . KP_2 + \ldots\ldots + A_\mu . KP_\mu = 0$$

Ἡ σχέσις αὕτη εὑρίσκεται, ἐὰν ληφθῇ μόνιμόν τι σημεῖον O, ὅτε ὑπάρχει ἡ ἑπομένη μεταξὺ εὐθυγράμμων τμημάτων σχέσις

$$2)\quad OK = \frac{A_0 . OP_0 + A_1 . OP_1 + \ldots\ldots + A_\mu . OP_\mu}{A_0 + A_1 + \ldots\ldots + A_\mu}$$

Ὁπόταν τὸ σημεῖον K πίπτῃ ἐπὶ τὸ σημεῖον O, προκύπτει ἡ σχέσις 1). Τὸ σημεῖον K λέγεται κέντρον βάρους τῶν σημείων $P_0, P_1, \ldots, P_\mu$ τῶν ὑποτιθεμένων, ὅτι ἔχουσι βάρη παριστάμενα ὑπὸ τῶν ποσοτήτων $A_0, A_1, \ldots\ldots, A_\mu$.

Τὰ εὐθύγραμμα τμήματα

$$OK,\ OP_0,\ OP_1,\ \ldots\ldots,\ OP_\mu$$

δύνανται νὰ νοηθῶσι πάντοτε διὰ τῆς ἐννοίας τῆς προβολῆς, ὅτι κεῖνται ἐν ἑνὶ καὶ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ἐν τῷ $(x+yi)$ ἐπιπέδῳ.

Τότε δὲ ἡ σχέσις 2) γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς·

$$3)\quad re^{\vartheta i} = \alpha_0\varrho_0 e^{\omega_0 i} + \alpha_1\varrho_1 e^{\omega_1 i} + \alpha_2\varrho_2 e^{\omega_2 i} + \ldots\ldots + \alpha_\mu\varrho_\mu e^{\omega_\mu i} \quad (i = \pm\sqrt{-1},\ \Sigma\alpha = 1)$$

ἢ

$$r(\text{συν}\,\vartheta + i\,\text{ημ}\,\vartheta) = \alpha_0\varrho_0(\text{συν}\,\omega_0 + i\,\text{ημ}\,\omega_0) + \alpha_1\varrho_1(\text{συν}\,\omega_1 + i\,\text{ημ}\,\omega_1) + \ldots\ldots + \alpha_\mu\varrho_\mu(\text{συν}\,\omega_\mu + i\,\text{ημ}\,\omega_\mu)$$

ὅθεν

$$4)\quad r\,\text{συν}\,\vartheta = \alpha_0\varrho_0\,\text{συν}\,\omega_0 + \alpha_1\varrho_1\,\text{συν}\,\omega_1 \ldots\ldots + \alpha_\mu\varrho_\mu\,\text{συν}\,\omega_\mu$$

$$5)\quad r\,\text{ημ}\,\vartheta = \alpha_0\varrho_0\,\text{ημ}\,\omega_0 + \alpha_1\varrho_1\,\text{ημ}\,\omega_1 \ldots\ldots + \alpha_\mu\varrho_\mu\,\text{ημ}\,\omega_\mu$$

καὶ

$$6)\quad r = \sqrt{\Sigma\alpha_\nu^2\varrho_\nu^2 + 2\Sigma\alpha_\lambda\alpha_\tau\varrho_\lambda\varrho_\tau\,\text{συν}\,(\omega_\lambda - \omega_\tau)}$$

$$7)\quad \vartheta = \text{τοξ εφ}\,\frac{\Sigma\alpha_\nu\varrho_\nu\,\text{ημ}\,\omega_\nu}{\Sigma\alpha_\nu\varrho_\nu\,\text{συν}\,\omega_\nu}$$

Ἐὰν δὲ ἰδίᾳ ὑποτεθῇ $\varrho_\nu = \varrho^\nu$, $\omega_\nu = \nu\omega$, $(\nu = 0, 1, 2, \ldots\ldots, \mu)$ καὶ τεθῇ $Z = re^{\vartheta i}$, $z = \varrho e^{\omega i}$, προκύπτει

$$8)\quad Z = \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \ldots\ldots + \alpha_\mu z^\mu$$

$$9)\quad r = \sqrt{\Sigma\alpha_\nu^2\varrho^{2\nu} + 2\Sigma\alpha_\lambda\alpha_\tau\varrho^\lambda\varrho^\tau\,\text{συν}\,(\lambda - \tau)\omega}$$

$$10)\quad \vartheta = \text{τοξ εφ}\,\frac{\Sigma\alpha_\nu\varrho^\nu\,\text{ημ}\,\nu\omega}{\Sigma\alpha_\nu\varrho^\nu\,\text{συν}\,\nu\omega}$$

Αἱ ἐξισώσεις 6), 7), 8), 9), 10) ἐπιδέχονται προφανῶς γεωμετρικὴν ἑρμηνείαν.

Σημ. Ἐὰν τὰ σημεῖα $P_0, P_1, P_2 \ldots$, ἦναι οὕτω διατεταγμένα, ὥστε αἱ εὐθεῖαι $P_0 P_1$, $P_1 P_2, \ldots$ νὰ σχηματίζωσι σχοινότονον πολύγωνον μετὰ τῶν δυνάμεων $A_0, A_1, A_2, \ldots$, προκύπτει, ὅτι, οἱασδήποτε οὔσης τῆς σχοινοτόνου κωνικῆς, ἐὰν τὸ σημεῖον, εἰς ὃ συντρέχουσιν αἱ δυνάμεις, κεῖται ἢ ἐντὸς ἢ ἐκτὸς ἢ ἐπὶ τῆς καμπύλης ταύτης, ἡ κωνικὴ τῶν δυνάμεων εἶναι ἢ ἔλλειψις ἢ ὑπερβολὴ ἢ παραβολή· καὶ οἱασδήποτε οὔσης τῆς κωνικῆς τῶν δυνάμεων, ἐὰν ὁ πόλος κεῖται ἢ ἐντὸς ἢ ἐκτὸς ἢ ἐπὶ τῆς καμπύλης ταύτης, ἡ σχοινότονος καμπύλη εἶναι ἢ ἔλλειψις ἢ ὑπερβολὴ ἢ παραβολή. Τοῦτο δὲ δὲν φαίνεται ἴσως ἄσχετον πρὸς τὴν οὐράνιον Μηχανικήν.

β) Σχέσις τοῦ βαρυκεντρικοῦ λογισμοῦ πρὸς τὰς ἀλγεβρικὰς ἐξισώσεις.

Ἐκ τῆς σχέσεως 8)

$$Z=\alpha_0+\alpha_1 z+\alpha_2 z^2+\ldots+\alpha_\mu z^\mu$$

προκύπτει, ὅτι πᾶν πολυώνυμον ἀκέραιον μιγάδος μεταβλητῆς διαιρούμενον διὰ τοῦ ἀθροίσματος (ἔχοντος τιμὴν διάφορον τοῦ 0) τῶν συντελεστῶν τῶν ὅρων αὐτοῦ παρέχει πρὸς πᾶσαν τιμὴν τῆς μεταβλητῆς τὸ κέντρον τοῦ βάρους τῶν κορυφῶν τοῦ πολυγώνου τοῦ ἀντιστοιχοῦντος κατὰ τὴν γραφικὴν παράστασιν 2) πρὸς τὸ πολυώνυμον τοῦτο. Μηδενίζεται δὲ τὸ πολυώνυμον τοῦτο διὰ πᾶσαν τιμὴν τῆς μεταβλητῆς, δι' ἣν τὸ κέντρον τοῦ βάρους πίπτει ἐπὶ τὸ σημεῖον O.

Κατὰ δὲ ταῦτα ἡ πρόσθεσις, ἀφαίρεσις, πολλαπλασιασμός, διαίρεσις, ὕψωσις εἰς δυνάμεις τῶν τοιούτων πολυωνύμων ἀνάγεται εἰς τὰς αὐτὰς πράξεις ἐπὶ μηχανικῶν δυνάμεων.

Ἐὰν δὲ $z_1, z_2, \ldots, z_\mu$ ἦναι αἱ ρίζαι τοῦ πολυωνύμου 8), ὑπάρχει

$$11) \quad Z=\alpha_\mu(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_\mu)$$

ἢ

$$re^{\vartheta i}=\alpha_\mu r_1 e^{\vartheta_1 i}\,.\,r_2 e^{\vartheta_2 i}\,.\,r_3 e^{\vartheta_3 i}\ldots r_\mu e^{\vartheta_\mu i}$$

ὅθεν

$$r=\alpha_\mu r_1 r_2 r_3 \ldots r_\mu$$

$$\vartheta=\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_3\ldots+\vartheta_\mu$$

τουτέστιν, ὁπόταν ἡ τιμὴ Z τοῦ κέντρου τοῦ βάρους ἀληθεύῃ τὴν ἐξίσωσιν $r=c$, ἡ μεταβλητὴ z ἀληθεύει τὴν ἐξίσωσιν $\alpha_\mu r_1 r_2 \ldots r_\mu=c$. Πρὸς δὲ τὴν ἐξίσωσιν $\vartheta=\gamma$ ἀντιστοιχεῖ ἡ ἐξίσωσις $\vartheta_2+\vartheta_2+\ldots+\vartheta_\mu=\gamma$, τῶν δύο παραμέτρων c καὶ γ οὐσῶν οἱωνδήποτε. Τὰ δὲ ἐξαγόμενα ταῦτα ἐπιδέχονται προφανῶς γεωμετρικὴν ἑρμηνείαν.

γ) Σχέσις τοῦ βαρυκεντρικοῦ λογισμοῦ πρὸς τὴν γενικὴν θεωρίαν τῶν συναρτήσεων.

Ἐν τῇ σχέσει 3)

$$re^{\vartheta i}=\alpha_0\varrho_0 e^{\omega_0 i}+\alpha_1\varrho_1 e^{\omega_1 i}+\ldots+\alpha_\mu\varrho_\mu e^{\omega_\mu i}$$

δύναται νὰ ὑποτεθῇ ἢ $r=0$ ἢ $\vartheta=0$, ἢ $\vartheta=\pm\pi$, ἢ $re^{\vartheta i}=f(u)$ καὶ $\alpha_\lambda=g_\lambda(z)$, $\omega_\lambda i=H_\lambda(z)$, $\varrho_\lambda=1$. Τότε δὲ τὸ θεώρημα τοῦ E. Borel (Acta Mathematica t. 20), ὅπερ εἶναι γενίκευσις γνωστοῦ θεωρήματος τοῦ E. Picard (Annales de l'Ecole Normale 1880) δι' ἀναλόγου μεθόδου, ἧς ἐποιήσατο χρῆσιν ὁ Hermite (Sur la fonction exponentielle, Paris 1874) καὶ ὁ Lindemann (Mathematische Annalen B. XX), ἀνάγεται προφανῶς εἰς ἁπλῆν σχέσιν τοῦ βαρυκεντρικοῦ λογισμοῦ· αἱ μέθοδοι ἄρα τούτου δύνανται νὰ ἐφαρμόζωνται πρὸς ἔρευναν καὶ ἀναζήτησιν τῶν ριζῶν τῶν ἀκεραίων καθόλου συναρτήσεων καὶ τῶν συναφῶν αὐταῖς ζητημάτων. Πρὸς τοῦτο δὲ ἀρκεῖ αἱ συναρτήσεις $g_\lambda(z)$ νὰ θεωρῶνται ὡς αἱ μᾶζαι τῶν ὑλικῶν σημείων $e^{H_\lambda(z)}$ καὶ ἑπομένως νὰ ἐξάγωνται εἰ δυνατὸν ἐντεῦθεν πᾶσαι αἱ ἀνωμαλίαι, τὰ ἰδιώματα καὶ αἱ διακλαδώσεις τῶν συναρτήσεων $g_\lambda(z)$ καὶ $H_\lambda(z)$· καὶ τανάπαλιν.

δ) Σχέσις τοῦ βαρυκεντρικοῦ λογισμοῦ πρὸς τὰς γραμμικὰς διαφορικὰς ἐξισώσεις μετὰ σταθερῶν συντελεστῶν ἄνευ δευτέρου μέλους.

Ἔστωσαν οἱ συντελεσταὶ τῆς γραμμικῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως ἄνευ δευτέρου μέλους

$$12) \quad \Phi(y)=\frac{d^\nu y}{dx^\nu}+A\frac{d^{\nu-1}y}{dx^{\nu-1}}+B\frac{d^{\nu-2}y}{dx^{\nu-2}}+\ldots+Ky$$

σταθεροὶ ἐν γένει ἀριθμοὶ καὶ τεθήτω $y=e^{\varphi x}$. Οὕτω προκύπτει ἡ ταυτότης

$$13) \quad \Phi(e^{\varphi x})=e^{\varphi x}f(\varphi)$$

ὅπου

$$14) \quad f(\varphi)=\varphi^\nu+A\varphi^{\nu-1}+\ldots+K$$

Καὶ ἐὰν μὲν αἱ ρίζαι $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu$ τοῦ πολυωνύμου 14) ἦναι ἄνισοι, τὸ γενικὸν ὁλοκλήρωμα τῆς ἐξισώσεως 12) εἶναι, ὡς γνωστόν,

$$15) \quad y=c_1 e^{\varphi_1 x}+c_2 e^{\varphi_2 x}+\ldots+c_\nu e^{\varphi_\nu x}$$

ὅπου $c_1, c_2, \ldots, c_\nu$ σταθεραὶ ποσότητες. Ἐὰν δὲ $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\lambda$ ἦναι αἱ ἄνισοι ῥίζαι τοῦ πολυωνύμου 14) καὶ $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\lambda$ οἱ ἀντίστοιχοι βαθμοὶ πολλαπλότητος αὐτῶν, τὸ γενικὸν ὁλοκλήρωμα τῆς ἐξισώσεως 12) εἶναι τῆς μορφῆς

$$16)\quad y = X_1 e^{\varphi_1 x} + X_2 e^{\varphi_2 x} + \ldots + X_\lambda e^{\varphi_\lambda x}$$

ὅπου $X_1, X_2, \ldots, X_\lambda$ πολυώνυμα ἀκέραια πρὸς x μετὰ σταθερῶν συντελεστῶν καὶ μετὰ τῶν ἀντιστοίχων βαθμῶν $\nu_1-1, \nu_2-1, \ldots, \nu_\lambda-1$.

Πρόδηλον, ὅτι αἱ ἐξισώσεις 15) καὶ 16) εἶναι κατ' ἀναλογίαν μερικαὶ περιπτώσεις τῆς ἐξισώσεως 3) τοῦ βαρυκεντρικοῦ λογισμοῦ.

ε) *Σχέσις τοῦ βαρυκεντρικοῦ λογισμοῦ πρὸς τὰς τριγωνομετρικὰς σειράς.*

Ἓν τῶν σπουδαιοτάτων ζητημάτων τῆς Μαθηματικῆς εἶναι ἡ θεωρία περὶ τῆς παραστάσεως οἱασδήποτε συναρτήσεως μιᾶς μεταβλητῆς διὰ τριγωνομετρικῶν σειρῶν τῆς μορφῆς

$$17)\quad \begin{cases} \alpha_1 \,\eta\mu\, x + \alpha_2 \,\eta\mu\, 2x + \alpha_3 \,\eta\mu\, 3x + \ldots \\ \frac{1}{2}\beta_0 + \beta_1 \,\sigma\upsilon\nu\, x + \beta_2 \,\sigma\upsilon\nu\, 2x + \beta_3 \,\sigma\upsilon\nu\, 3x + \ldots \end{cases}$$

Αἱ τοιαῦται σειραὶ ἀπησχόλησαν τὴν προσοχὴν πολλῶν Μαθηματικῶν, οἷοι ὁ d'Alembert, Euler, Daniel Bernoulli, Lagrange, Fourier, Poisson, Cauchy, Dirichlet, Riemann κλ.

Πρώτην ἀφορμὴν πρὸς σπουδὴν τῶν σειρῶν τούτων παρέσχον αἱ ἔρευναι περὶ τῶν παλλομένων χορδῶν. Ὑπὸ ὡρισμένας ὑποθέσεις, αἵτινες ἐπιτυγχάνουσι πράγματι κατὰ προσέγγισιν, καθορίζεται ἡ μορφὴ τεταμένης ἐν ἐπιπέδῳ παλλομένης χορδῆς διὰ τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως εἰς μερικὰς παραγώγους

$$18)\quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \lambda^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

ὅπου λ ἀνεξάρτητον τοῦ χρόνου t καὶ αὐτοῦ τοῦ x, ἐὰν ἡ χορδὴ ἔχῃ πανταχοῦ αὐτῆς τὴν αὐτὴν πυκνότητα. Ἡ ὑπὸ d'Alembert δοθεῖσα γενικὴ λύσις τῆς ἐξισώσεως 18) περιέχεται ἐν τῷ τύπῳ

$$19)\quad y = f(x+\lambda t) + \varphi(x-\lambda t)$$

Δευτέραν δὲ ἀφορμὴν πρὸς σπουδὴν τῶν σειρῶν 17) ἔδωκεν ἡ ἐξίσωσις

$$20)\quad \frac{\partial u}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

τῆς μαθηματικῆς θεωρίας τῆς θερμότητος, ὅπου μ σταθερὰ ποσότης.

Ἡ σειρὰ 17) δύναται νὰ θεωρηθῇ ἢ ὡς τὸ ἄθροισμα δύο σειρῶν, ὧν ἡ μὲν μία

$$21)\quad \alpha_1 \,\eta\mu\, x + \alpha_2 \,\eta\mu\, 2x + \ldots + \alpha_\nu \,\eta\mu\, \nu x + \ldots$$

χωρεῖ κατὰ τὰ ἡμίτονα τῶν ἀκεραίων πολλαπλασίων τῆς μεταβλητῆς, ἡ δὲ ἑτέρα

$$22)\quad \beta_1 \,\sigma\upsilon\nu\, x + \beta_2 \,\sigma\upsilon\nu\, 2x + \ldots + \beta_\nu \,\sigma\upsilon\nu\, \nu x + \ldots$$

χωρεῖ κατὰ τὰ συνημίτονα τῶν ἀκεραίων πολλαπλασίων τῆς αὐτῆς μεταβλητῆς, ἢ ὡς μία σειρά, ἧς ὁ γενικὸς ὅρος εἶναι

$$23)\quad \alpha_\nu \,\eta\mu\, \nu x + \beta_\nu \,\sigma\upsilon\nu\, \nu x$$

ὅπου

$$24)\quad \alpha_\lambda = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,\eta\mu\,\lambda x\,dx$$

$$(\lambda = 1, 2, \ldots)$$

$$25)\quad \beta_\lambda = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,\sigma\upsilon\nu\,\lambda x\,dx$$

Ἡ ἔρευνα τῶν πολλῶν καὶ ποικίλων συνθηκῶν, ὑφ' ἃς βεβαιοῦται ἡ σύγκλισις τῆς σειρᾶς 17) ἤγαγεν εἰς τὴν συγγραφὴν πολλῶν σπουδαίων ἐργασιῶν. Διὰ $f(x)=1$ εὑρίσκεται ἐκ τῆς 21) καὶ 24)

$$1 = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\eta\mu\, x}{1} + \frac{\eta\mu\, 3x}{3} + \frac{\eta\mu\, 5x}{5} + \ldots\right) \quad (\pi > x > 0)$$

ἢ

$$\frac{\pi}{4} = \frac{\eta\mu\, x}{1} + \frac{\eta\mu\, 3x}{3} + \frac{\eta\mu\, 5x}{5} + \ldots$$

καὶ διὰ $x = \frac{\pi}{2}$ προκύπτει ἡ σειρὰ τοῦ Leibniz

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

Διὰ $f(x)=x$ εὑρίσκεται ἐκ τῆς 22) καὶ 25)

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sigma\upsilon\nu\, x}{1^2} + \frac{\sigma\upsilon\nu\, 3x}{3^2} + \frac{\sigma\upsilon\nu\, 5x}{5^2} + \ldots\right)$$

$$(\pi \geqq x \geqq 0)$$

καὶ διὰ $x=0, \pi$ προκύπτει

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots$$

Αἱ τριγωνομετρικαὶ σειραὶ 21) καὶ 22) εἶναι προδήλως μερικαὶ περιπτώσεις τῶν τύπων 4) καὶ 5), ἐὰν ἐν τοῖς τύποις τούτοις τεθῇ

$$\varrho_0=\varrho_1=\varrho_2=\ldots=\alpha$$

$$\omega_0=0,\ \omega_1=x,\ \omega_2=2x, \ldots$$

τότε δὲ τὰ ὑλικὰ σημεῖα $P_0, P_1, P_2, \ldots$ κεῖνται ἐπὶ τῆς περιφερείας, ἧς ἡ ἀκτὶς α.

Ἐὰν ἤδη αἱ ποσότητες $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ ἦναι πραγματικαὶ καὶ ἀπὸ $\alpha_\varkappa$ καὶ ἐφεξῆς οὖσαι θετικαὶ ἀποτελῶσι φθίνουσαν σειρὰν τοιαύτην, ὥστε α_ν νὰ τείνῃ νὰ καταστῇ, ὅσον ἂν θέλῃ τις μικρόν, ἡ σειρὰ

$$\alpha_0+\alpha_1 e^{xi}+\alpha_2 e^{2xi}+\ldots$$

εἶναι ἀπολύτως συγκλίνουσα. Διότι ἡ σειρὰ

$$(1-e^{xi})(\alpha_\nu e^{\nu xi}+\alpha_{\nu+1}e^{(\nu+1)xi}+\ldots)=$$
$$=\alpha_\nu e^{\nu xi}-(\alpha_\nu-\alpha_{\nu+1})e^{(\nu+1)xi}-(\alpha_{\nu+1}-\alpha_{\nu+2})e^{(\nu+2)xi}-\ldots$$

εἶναι κατ' ἀπόλυτον τιμὴν ἐλάσσων τῆς σειρᾶς

$$\alpha_\nu+(\alpha_\nu-\alpha_{\nu+1})+(\alpha_{\nu+1}-\alpha_{\nu+2})+\ldots<2\alpha_\nu$$

ἤτοι εἶναι, ὅσον ἂν θέλῃ τις μικρά, τοῦ ν ὄντος ὁσονδήποτε μεγάλου.

Ἡ δὲ σειρὰ

$$26)\quad \frac{1}{2}\beta_0+\Sigma(\beta_\lambda \,\text{συν}\, \lambda x+\alpha_\lambda \,\text{ημ}\, \lambda x)\quad (\lambda=1,2,\ldots)$$

συγκλίνει ἐν τῷ διαστήματι $(-\pi\ldots+\pi)$, ἐὰν αἱ μᾶζαι α_λ, β_λ ἦναι τοιαῦται, ὥστε

$$27)\quad \alpha_\lambda=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,\text{ημ}\,\lambda x dx$$

$$28)\quad \beta_\lambda=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,\text{συν}\,\lambda x dx$$

ὅπου f(x) συνεχὴς συνάρτησις ἐν τῷ διαστήματι $(-\pi\ldots+\pi)$ ἢ ἐν τοῖς μερικοῖς αὐτοῦ ἐν πεπερασμένῳ πλήθει διαστήμασιν. Οἱ τύποι οὗτοι οἱ παρέχοντες τὰς μάζας α_λ, β_λ δεικνύουσιν, ὅτι, ἐὰν μὲν ἡ συνάρτησις f(x) ἦναι περιττή, εἶναι $\beta_\lambda=0$ ἐὰν δὲ ἀρτία, $\alpha_\lambda=0$.

Ἐκ τῆς θεωρίας τῆς συγκλίσεως τῶν τριγωνομετρικῶν σειρῶν προκύπτει, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τοιαύτης σειρᾶς εἶναι περιοδικὴ συνάρτησις τοῦ x. Τοῦτο δὲ καταφαίνεται νῦν ἐκ τῶν τύπων 4) καὶ 5), ὧν μερικαὶ περιπτώσεις εἶναι αἱ τριγωνομετρικαὶ σειραὶ 17), καὶ ἐκ τῶν τύπων 6) καὶ 7).

Πρόδηλον, ὅτι οἱ τύποι 2), . . ., 7) καὶ 26), . . ., 28) δύνανται νὰ ἐφαρμόζωνται καὶ ἐπὶ ζητημάτων τῆς Ἀστρονομίας.

Ἐν Ἀθήναις κατὰ Μάρτιον 1909.

ΑΘ. ΚΑΡΑΓΙΑΝΝΙΔΗΣ

ΧΡΗΣΤΟΜΑΝΕΙΟΝ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

Ἡ χήρα τοῦ ἀειμνήστου καθηγητοῦ τῆς Χημείας Ἀν. Χρηστομάνου δι' ἐπιστολῆς της πρὸς τὸν πρύτανιν τοῦ Πανεπιστημίου ἐδήλωσεν ὅτι δωρεῖ δραχμὰς 3000 ὅπως ἐκ τῶν τόκων αὐτῶν ἱδρυθῇ διαγώνισμα, εἰς τιμὴν τῆς μνήμης τοῦ συζύγου της, ὅπερ νὰ ἀπονέμεται ἀνὰ πᾶσαν τριετίαν εἰς τὸν τελειόφοιτον τῶν φυσικῶν ἐπιστημῶν τὸν ἐπιτελέσαντα τὴν ἀρίστην ἐπιστημονικὴν ἐργασίαν ἐν τῷ Χημείῳ τοῦ Ἐθνικοῦ Πανεπιστημίου.

Ἡ δωρεὰ αὕτη τῆς σεβαστῆς δεσποίνης εἶνε εἰς ἄκρον πολύτιμος διότι θέλει συντελέσῃ ὅπως οἱ σπουδασταὶ τῆς Χημείας μετὰ μεγαλειτέρου ζήλου ἐπιδοθῶσιν εἰς τὴν ἐκτέλεσιν ἐπιστημονικῶν ἐρευνῶν καὶ οὕτω ἡ παρ' ἡμῖν χημικὴ ἐπιστήμη, ὑπὲρ ἧς τόσον ἐμόχθησεν ὁ ἀείμνηστος καθηγητής, ἔτι μᾶλλον θέλει προαχθῇ καὶ εὐδοκιμήσει.

Ἐξαιρέσει ὀλίγων φιλοτίμων νέων, οἱ παρ' ἡμῖν σπουδασταὶ ἀπέφευγον πάντοτε τὴν ἐκτέλεσιν ἐπιστημονικῶν ἐρευνῶν, αἵτινες θὰ ἠδύναντο νὰ ἀποτελέσωσι τὸ θέμα τῆς ἐπὶ διδακτορίᾳ διατριβῆς αὐτῶν, ὅπως τοῦτο ὑποχρεωτικῶς συμβαίνει διὰ πάντας τοὺς σπουδάζοντας εἰς τὰ Πανεπιστήμια τῆς Ἑσπερίας. Διὰ τοῦ Χρηστομανείου ὅμως διαγωνίσματος εἶνε ἐλπὶς ὅτι κατὰ πολὺ θέλει ἀναπτερωθῇ ὁ ζῆλος αὐτῶν καὶ ὅτι σὺν τῷ χρόνῳ καὶ ἐκ τοῦ Χημείου τοῦ Ἐθνικοῦ Πανεπιστημίου θέλουσι δημοσιευθῇ ὑπὸ τῶν σπουδαστῶν διατριβαὶ ἐπὶ διδακτορίᾳ δυνάμεναι νὰ παραβληθῶσι πρὸς τὰς τῶν μεγάλων εὐρωπαϊκῶν Πανεπιστημίων.

Δ. Τ.