ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ

ΜΗΝΙΑΙΟΝ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟΝ ΣΥΓΓΡΑΜΜΑ

ΤΟΥ ΕΛΛΗΝΙΚΟΥ ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΟΥ ΣΥΛΛΟΓΟΥ

ΕΠΙΜΕΛΕΙᾼ

Γ. Π. ΒΟΥΓΙΟΥΚΑ

ΜΗΧΑΝΙΚΟΥ

ΕΤΟΣ Ι'. — ΑΘΗΝΑΙ, ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ 1910 — ΑΡΙΘ. 9.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΣΥΜΒΟΛΗ

εἰς τὴν κίνησιν τῶν ῥευστῶν, ἐν οἷς κινοῦνται κατὰ γνωστὸν τρόπον στερεὰ σώματα ἄνευ ἐξωτερικῆς δυνάμεως.

Κατὰ τὸν G. Gouy (Compt. rend. 109, p. 102, 1889), ἡ αἰτία τοῦ φαινομένου τῆς ὑπὸ τοῦ βοτανικοῦ R. Brown (Pogg. Ann. 14, p. 294, 1828) παρατηρηθείσης κινήσεως τῶν ἔν τινι ῥευστῷ αἰωρουμένων σωματίων ὀφείλει νὰ ἀναζητηθῇ οὐχὶ ἐν τοῖς σωματίοις τούτοις, ἀλλ' ἐν αὐτῷ τούτῳ τῷ ῥευστῷ τῷ συναποκομίζοντι αὐτὰ δι' ἐσωτερικῆς κινήσεως ἄνευ τινὸς ἐξωτερικῆς δυνάμεως. Περὶ τῆς κινήσεως ταύτης τῶν ἔν τινι ῥευστῷ αἰωρουμένων σωματίων πειραματικαὶ μὲν παρατηρήσεις πολλαὶ πολλαχόθεν ἐγένοντο (πβλ. M. von Smolouchowski, Ann. d. Phys. 21, 1906), ἐν αἷς καὶ ἡ ὑπὸ Κ. Μαλτέζου (Compt. rend. 121, p. 303, 1895), θεωρητικὴ δὲ ἐξήγησις ἐδόθη μόνον κυρίως ὑπὸ A. Einstein (Ann. d. Phys. 17, p. 549, 1905 καὶ 19, p. 371, 1906).

Οὐ μόνον ὑπὸ καθαρῶς φυσικήν, ἀλλὰ καὶ ὑπὸ ἀστρονομικὴν ἔποψιν ἡ ἐν λόγῳ κίνησις παρέχει μέγα τὸ διαφέρον. Θεωρήσωμεν τὸν Γαλαξίαν· ἐνταῦθα, ὡς καὶ ἐν τοῖς ῥευστοῖς ἐν γένει, παρατηρεῖται πληθὺς σωματίων, πληθὺς ἀστέρων, κινουμένων μετὰ μεγάλων ἐν γένει ταχυτήτων. Ἡ κίνησις τῶν ἀστέρων τοῦ Γαλαξίου εἶναι τόσον περίπλοκος, ὅσον καὶ ἡ κίνησις τῶν μορίων ἀερίου τινός. Αἱ στατιστικαὶ μέθοδοι αἱ στηριζόμεναι ἐπὶ τοῦ λογισμοῦ τῶν πιθανοτήτων καὶ ἐφαρμοζόμεναι ἐπὶ τῆς κινήσεως τῶν μορίων τῶν ἀερίων δύνανται νὰ ἐφαρμόζωνται καὶ ἐπὶ τῶν μορίων τοῦ Γαλαξίου, ἐπὶ τῶν ἀστέρων. Ἡ ἐξομοίωσις αὕτη τοῦ Γαλαξίου πρὸς ἀεριώδη τινὰ μᾶζαν κατὰ τὸν Lord Kelvin εὑρίσκεται κατὰ προσέγγισιν ἐν συμφωνίᾳ πρὸς τὰς ἀστρονομικὰς παρατηρήσεις.

Ὡς γνωστόν, ὁ Crookes εἰσήγαγε τὴν ἔννοιαν τετάρτης καταστάσεως τῆς ὕλης, καθ' ἣν τὰ ἀέρια καθιστάμενα λίαν ἀραιὰ καταντῶσιν εἰς τὴν ἀκτινοβολοῦσαν ὕλην. Ὁ δὲ Γαλαξίας λαμβανομένης ὑπ' ὄψιν τῆς μικρᾶς αὐτοῦ πυκνότητος παρέχει μᾶλλον τὴν εἰκόνα ἀκτινοβολούσης ὕλης ὑπὸ μορφὴν πεπλατυσμένου δίσκου ἢ μᾶλλον ἑλικοειδοῦς νεφελώματος μεγάλων διαστάσεων. Ἡ τροχιὰ μορίου ἀερίου τινὸς δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς σχηματιζομένη ἐξ εὐθυγράμμων τμημάτων ἡνωμένων διὰ σμικρῶν τόξων χάριν τῶν διαδοχικῶν ὤσεων· τὸ δὲ μῆκος ἑκάστου τῶν εὐθυγράμμων τούτων τμημάτων δὲν εἶναι τὸ αὐτὸ διὰ πάντα τὰ τμήματα καὶ διὰ πάντα τὰ μόρια καὶ ἑπομένως δύναται νὰ λαμβάνηται ὁ μέσος ὅρος τῶν μηκῶν τούτων, ὅστις εἶναι τόσῳ μείζων, ὅσῳ ἡ πυκνότης τοῦ ἀερίου ἀσθενεστέρα. Τὰ δὲ νεφελώματα διακρίνονται κυρίως εἰς τρεῖς κατηγορίας· εἰς νεφελώματα ἀκανόνιστα, δακτυλιοειδῆ καὶ ἑλικοειδῆ. Αἱ δύο πρῶται κατηγορίαι φαίνεται, ὅτι ἐξαρτῶνται ἐκ τοῦ Γαλαξίου, ἐν ᾧ ἡ τρίτη κατηγορία θεωρεῖται γενικῶς ἀνεξάρτητος αὐτοῦ ἀποτελουμένη ἐκ πλήθύος ἀστέρων. Κατὰ δὲ τὰς νέας ἐργασίας τοῦ Stratonoff ὁ Γαλαξίας δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἑλικοειδὲς νεφέλωμα παραβαλλόμενον πρὸς ἀέριον ἐν μονίμῳ κινήσει, ἐν τῷ ὁποίῳ κρατοῦσιν ἐσωτερικὰ ρεύματα. Ἐὰν ἡ περιστροφικὴ κίνησις τοῦ κεντρικοῦ πυρῆνος τοῦ ἑλικοειδοῦς νεφελώματος ἦναι πολὺ ταχεῖα, οἱ ἀστέρες τείνουσιν ἕνεκα τῆς φυγοκέντρου δυνάμεως νὰ ἀπομακρυνθῶσι τοῦ ἰσημερινοῦ· ἐπειδὴ δὲ ἡ μὲν ροπὴ τῆς περιστροφῆς αὐτῶν μένει σταθερά, ἡ δὲ ἐπιβατικὴ ἀκτὶς αὐξάνεται, ἡ γωνιακὴ ταχύτης ἐλαττοῦται. Κατὰ δὲ τὴν ἀπομάκρυνσιν ταύτην πᾶς ἀστὴρ τείνει νὰ ἀπολέσῃ τὴν ταχύτητα αὐτοῦ ὑπείκων οὕτω τῇ κεντρομόλῳ δυνάμει. Ἐν τῇ ἐπετηρίδι τοῦ Ἐθνικοῦ Πανεπιστημίου τοῦ 1904 καὶ 1905 καὶ τῷ «Ἀρχιμήδει» τοῦ 1908 ἀπέδειξα διὰ τῶν ἐξισώσεων τῆς ὑδροδυναμικῆς τὴν ἐν λόγῳ ἑλικοειδῆ κίνησιν.

Ἐν τοῖς ἑπομένοις ἀποδεικνύω τὴν κίνησιν τῶν ρευστῶν, ἐν οἷς αἰωρούμενα κινοῦνται κατὰ γνωστὸν τρόπον στερεὰ σώματα ἄνευ ἐξωτερικῆς τινος δυνάμεως, στηριζόμενος ἐπὶ ἐργασιῶν τοῦ Dirichlet, Clebsch, Bjerknes καὶ Einstein.

Ἔστω, ὅτι ἔν τινι ρευστῷ πανταχοῦ ἐν ἠρεμίᾳ εὑρισκομένῳ κινεῖται στερεόν τι σῶμα οἱασδήποτε μορφῆς κατὰ γνωστόν τινα τρόπον· τίς ἡ κίνησις τοῦ ρευστοῦ;

Τεθείσθω, ὅτι ὑπάρχει μονότιμος καὶ συνεχὴς συνάρτησις φ, ἥτις εἶναι τὸ δυναμικὸν τῶν ταχυτήτων, καὶ δύο συστήματα ὀρθογωνίων ἀξόνων, ὧν τὸ μὲν τῶν συντεταγμένων ξ, η, ζ εἶναι μόνιμον ἐν τῷ χώρῳ, τὸ δὲ τῶν x, y, z ἀρρήκτως συνδεδεμένον πρὸς τὸ κινούμενον σῶμα. Οὕτως ὑπάρχουσιν αἱ σχέσεις

$$1)\quad \begin{cases} \xi = \alpha+\alpha_1 x+\alpha_2 y+\alpha_3 z \\ \eta=\beta+\beta_1 x+\beta_2 y+\beta_3 z \\ \zeta = \gamma+\gamma_1 x+\gamma_2 y+\gamma_3 z \end{cases}$$

Ἔστωσαν δὲ u, v, w αἱ συνιστῶσαι τῆς ταχύτητος τῆς ἀρχῆς τῶν x, y, z κατὰ τὰς διευθύνσεις τῶν x, y, z καὶ p, q, r αἱ συνιστῶσαι τῆς περιστροφικῆς ταχύτητος τοῦ σώματος πρὸς τοὺς αὐτοὺς ἄξονας. Τότε αἱ παραστάσεις

$$2)\quad \begin{cases} u+zq-yr \\ v+xr-zp \\ w+yp-xq \end{cases}$$

εἶναι αἱ συνιστῶσαι τῆς ταχύτητος τοῦ σημείου (x, y, z) τοῦ σώματος κατὰ τοὺς ἄξονας τῶν x, y, z. Αἱ αὐταὶ προφανῶς παραστάσεις εἶναι αἱ συνιστῶσαι τῆς ταχύτητος κατὰ τοὺς αὐτοὺς ἄξονας μορίου τινὸς τοῦ ρευστοῦ ἐν σχετικῇ πρὸς τὸ σῶμα εὑρισκομένου ἠρεμίᾳ. Ἐντεῦθεν συνάγεται, ὅτι εἶναι

$$3)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}-u-zq+yr \\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}-v-xr+zp \\[2mm] \dfrac{dz}{dt}=\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}-w-yp+xq \end{cases}$$

Ἡ δὲ ὁλοκλήρωσις τῶν ἐξισώσεων τούτων παρέχει τὴν σχετικὴν κίνησιν πάντων τῶν μορίων τοῦ ρευστοῦ πρὸς τὸ σῶμα, ἐὰν u, v, w, p, q, r ἦναι γνωσταὶ συναρτήσεις τοῦ χρόνου t καὶ φ ἦναι ὡσαύτως γνωστόν. Ἡ δὲ ἀπόλυτος κίνησις τῶν μορίων τοῦ ρευστοῦ εὑρίσκεται εἶτα ἐκ τῶν ἐξισώσεων 1).

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ φ ἔστω n ἡ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ ρευστοῦ διευθυνομένη κάθετος πρὸς στοιχεῖόν τι τῆς ἐπιφανείας τοῦ σώματος· τότε αἱ παραστάσεις 2) πολλαπλασιασθεῖσαι ἀντιστοίχως ἐπὶ συν (n, x), συν (n, y), συν (n, z) καὶ προστεθεῖσαι παρέχουσι τὴν συνιστῶσαν $\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}$ τῆς ταχύτητος τοῦ θεωρουμένου στοιχείου κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς n, ἤτοι εἶναι

$$4)\quad \frac{\partial\varphi}{\partial n}=(u+zq-yr)\,\text{συν}\,(n,x)+ (v+xr-zp)\,\text{συν}\,(n,y)+(w+yp-xq)\,\text{συν}\,(n,z)$$

Ἔστωσαν δὲ καὶ αἱ ἑξῆς συνθῆκαι: ὅτι $\varphi, \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}, \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}, \dfrac{\partial\varphi}{\partial z}$ εἶναι μονότιμοι συνεχεῖς συναρτήσεις μηδενιζόμεναι διὰ τιμὰς τῶν x, y, z πολὺ μεγάλας καὶ $\Delta\varphi=\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0$ ἐν τῷ ὑπὸ τοῦ ρευστοῦ πεπληρωμένῳ χώρῳ τῷ κεκλεισμένῳ π. χ. ἐν σφαίρᾳ ἀκτῖνος πολὺ μεγάλης. Ὑπὸ δὲ τὰς συνθήκας ταύτας τὸ φ εἶναι τῆς μορφῆς

$$5)\quad \varphi=u\varphi_1+v\varphi_2+w\varphi_3+p\varphi_4+q\varphi_5+r\varphi_6$$

ὅπου ἕκαστον τῶν $\varphi_1, \varphi_2 \ldots$ ἀληθεύει τὴν ἐξίσωσιν $\Delta\varphi=0$ μηδενιζόμενον διὰ τιμὰς τῶν x, y, z πολὺ μεγάλας καὶ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κινουμένου σώματος εἶναι

$$6)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial n}=\text{συν}\,(n,x) \\ \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial n}=\text{συν}\,(n,y) \\ \dfrac{\partial\varphi_3}{\partial n}=\text{συν}\,(n,z) \\ \dfrac{\partial\varphi_4}{\partial n}=y\,\text{συν}\,(n,z)-z\,\text{συν}\,(n,y) \\ \dfrac{\partial\varphi_5}{\partial n}=z\,\text{συν}\,(n,x)-x\,\text{συν}\,(n,z) \\ \dfrac{\partial\varphi_6}{\partial n}=x\,\text{συν}\,(n,y)-y\,\text{συν}\,(n,x) \end{cases}$$

Οὕτω δὲ αἱ συναρτήσεις $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ εἶναι ἐντελῶς ὡρισμέναι ἐξαρτώμεναι οὐχὶ ἐκ τῆς κινήσεως τοῦ σώματος, ἀλλ' ἀποκλειστικῶς ἐκ τοῦ σχήματος αὐτοῦ. Ἡ κίνησις σφαίρας ἐν ρευστῷ ἐξητάσθη πρῶτον ὑπὸ Dirichlet (Monatsber. d. Berl. Acad. 1852, p. 12), ἡ δὲ τοῦ ἐλλειψοειδοῦς ὑπὸ Clebsch (Crelle's Journal, Bd. 52, p. 103 καὶ Bd. 53, p. 287), γενικώτερον δὲ πρόβλημα ἐξητάσθη ὑπὸ Bjerknes ἐν τῷ Mémoire sur le mouvement simultané de corps sphériques variables dans un fluide indéfini et incompressible (Société des sciences de Christiania 1871).

Κατὰ τὰς ὑποθέσεις τῆς περὶ μορίων θεωρίας σωμάτια κινούμενα κατὰ τὴν κίνησιν τοῦ Brown τελοῦσι τὴν κίνησιν ταύτην συναρτήσει τοῦ ὕψους, ὡς τέλειόν τι ἀέριον ὑπὸ τὴν ἐνέργειαν τῆς βαρύτητος καὶ ἀληθεύουσι τὴν σχέσιν

$$7)\quad log\,\frac{a_0}{a}=\frac{\text{N}}{\text{RT}}\,v(\varrho-\varrho_0)gh$$

ὅπου a_0 καὶ a οἱ ἀριθμοὶ τῶν σωματίων ἐπὶ δύο στρωμάτων ἀποστάσεως h, v ὁ ὄγκος ἑκάστου σωματίου, $(\varrho-\varrho_0)$ ἡ φαινομένη πυκνότης (διαφορὰ τῆς ἀληθοῦς πυκνότητος τοῦ σωματίου ἀπὸ τῆς τοῦ ρευστοῦ), N ἡ σταθερὰ τοῦ Avogardo, R ἡ σταθερὰ τῆς ἐξισώσεως τῶν ἀερίων, T ἡ ἀπόλυτος θερμοκρασία. Οἱ Chaudesaigues, Perrin καὶ Darbowski (Compt. rend. 1909) ἐβεβαίωσαν διὰ πειραμάτων, ὅτι ἡ κίνησις τοῦ Brown ἀληθεύει τὰς ἐξισώσεις τοῦ Einstein:

$$8)\quad \lambda=\sqrt{t}\sqrt{\frac{\text{RT}}{\text{N}}\,\frac{1}{3\pi\tau\nu}}$$

$$9)\quad \mu=\sqrt{t}\sqrt{\frac{\text{RT}}{\text{N}}\,\frac{1}{4\pi\tau\nu^3}}$$

ὧν ἡ μὲν 8) παριστᾷ τὴν μέσην προβολὴν ἐπί τινα ἄξονα τῆς μετακινήσεως, ἣν ὑφίσταται κατὰ τὸν χρόνον t σφαιρικὸν σωμάτιον ἀκτῖνος ν ἔν τινι ρευστῷ τριβῆς τ, ἡ δὲ 9) παριστᾷ τὴν μέσην περιστροφὴν τοῦ αὐτοῦ σωματίου περί τινα ἄξονα κατὰ τὸν αὐτὸν χρόνον t. Πρόδηλον, ὅτι ἡ περιστροφικὴ κίνησις τοῦ σφαιρικοῦ σωματίου αὐξανομένης τῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ εἶναι πολλῷ μικροτέρα τῆς μεταβατικῆς αὐτοῦ κινήσεως, ὅπερ βεβαιοῦσι κατὰ προσέγγισιν καὶ αἱ ἀστρυνομικαὶ παρατηρήσεις λαμβανομένης ὑπ' ὄψιν καὶ τῆς μάζης τῶν οὐρανίων σωμάτων.

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων 3), 5), 6), 8), 9) ποριζόμεθα νῦν διὰ σφαιρικόν τι σωμάτιον κατὰ προσέγγισιν·

$$10)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}+[\text{A}(y-z)-\text{B}]\sqrt{t} \\ \dfrac{dy}{dt}=\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}+[\text{A}(z-x)-\text{B}]\sqrt{t} \\ \dfrac{dz}{dt}=\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}+[\text{A}(x-y)-\text{B}]\sqrt{t} \end{cases}$$

$$11)\quad \varphi=\text{B}\frac{\nu^3}{2}\left(\frac{\partial\frac{1}{m}}{\partial x}+\frac{\partial\frac{1}{m}}{\partial y}+\frac{\partial\frac{1}{m}}{\partial z}\right)\sqrt{t}$$

$$12)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial n}\left(\dfrac{\nu^3}{2}\,\dfrac{\partial\frac{1}{m}}{\partial x}\right)=\text{συν}\,(n,x) \\ \dfrac{\partial}{\partial n}\left(\dfrac{\nu^3}{2}\,\dfrac{\partial\frac{1}{m}}{\partial y}\right)=\text{συν}\,(n,y) \\ \dfrac{\partial}{\partial n}\left(\dfrac{\nu^3}{2}\,\dfrac{\partial\frac{1}{m}}{\partial z}\right)=\text{συν}\,(n,z) \end{cases}$$

ὅπου χάριν συντομίας ἐτέθη

$$\text{A ἀντὶ } \sqrt{\frac{\text{RT}}{\text{N}}\,\frac{1}{4\pi\tau\nu^3}},\quad \text{B ἀντὶ } \sqrt{\frac{\text{RT}}{\text{N}}\,\frac{1}{3\pi\tau\nu}},$$

$$m \text{ ἀντὶ } \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Κατὰ δὲ ταῦτα τὰ δεύτερα μέλη τῶν ἐξισώσεων 10) εἶναι γνωσταὶ συναρτήσεις τῶν x, y, z, t.

Ἐπειδὴ αἱ $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ εἶναι πολὺ μικραὶ διὰ τιμὰς τῶν x, y, z πολὺ μεγάλας, ἔχομεν κατὰ προσέγγισιν

$$13)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{d\omega} = \mathrm{A}(y-z) - \mathrm{B} \\[2ex] \dfrac{dy}{d\omega} = \mathrm{A}(z-x) - \mathrm{B} \\[2ex] \dfrac{dz}{d\omega} = \mathrm{A}(x-y) - \mathrm{B} \end{cases}$$

ὅπου $\omega = \frac{2}{3}\sqrt{t^3}$. Ὅθεν καὶ

$$14)\quad x+y+z = -3\mathrm{B}\omega + c$$

$$15)\quad x^2+y^2+z^2 = 3\mathrm{B}^2\omega^2 - 2\mathrm{B}c\omega + c'$$

$$16)\quad s = \mathrm{K}\omega + \mathrm{K}'$$

ἔνθα c, c', K, K′ σταθεραὶ ποσότητες καὶ s τὸ μῆκος τῆς τροχιᾶς. Ἐκ τῶν ἐξισώσεων 13) λαμβάνομεν καὶ

$$17)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2(x-y)}{d\omega^2} = -3\mathrm{A}^2(x-y) \\[2ex] \dfrac{d^2(y-z)}{d\omega^2} = -3\mathrm{A}^2(y-z) \\[2ex] \dfrac{d^2(z-x)}{d\omega^2} = -3\mathrm{A}^2(z-x) \end{cases}$$

ὅθεν

$$18)\quad \begin{cases} x-y = c_1\,\text{συν}\,\mathrm{A}\sqrt{3}\omega + c_2\,\text{ημ}\,\mathrm{A}\sqrt{3}\omega \\ y-z = c_1'\,\text{συν}\,\mathrm{A}\sqrt{3}\omega + c_2'\,\text{ημ}\,\mathrm{A}\sqrt{3}\omega \\ z-x = -(c_1+c_1')\,\text{συν}\,\mathrm{A}\sqrt{3}\omega - (c_2+c_2')\,\text{ημ}\,\mathrm{A}\sqrt{3}\omega \end{cases}$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως 14) καὶ ἐκ δύο τῶν ἐξισώσεων 18) ὁρίζονται τὰ x, y, z συναρτήσει τοῦ Α, τοῦ Β καὶ τοῦ ω, ἤτοι τοῦ $\frac{2}{3}\sqrt{t^3}$, καὶ ἐπομένως καὶ τὰ ξ, η, ζ ἐκ τῶν ἐξισώσεων 1). Αἱ δὲ σταθεραὶ ποσότητες c, c', c_1, c_2, c_1', c_2' ὁρίζονται ἐκ τῶν τιμῶν τῶν x, y, z καὶ ἐκ τῶν τιμῶν τῶν συνιστωσῶν v_x, v_y, v_z τῆς ταχύτητος διὰ $t=0$. Ὁμοίως ὁρίζονται καὶ αἱ σταθεραὶ Κ καὶ Κ′ τῆς ἐξισώσεως 16).

Ἐκ δὲ τῶν ἐξισώσεων 18) εὑρίσκομεν εὐκόλως τὰς ἑπομένας ἐξισώσεις 19)

$$[c_2(y-z) - c_2'(x-y)]^2 + [c_1(y-z) - c_1'(x-y)]^2 = (c_1c_2' - c_2c_1')^2$$

$$[c_2(z-x) + (c_2+c_2')(x-y)]^2 + [c_1(z-x) + (c_1+c_1')(x-y)]^2 = (c_1c_2' - c_2c_1')^2$$

$$[c_2'(z-x) + (c_2+c_2')(y-z)]^2 + [c_1'(z-x) + (c_1+c_1')(x-y)]^2 = (c_1c_2' - c_2c_1')^2$$

Ὅθεν συνάγεται, ὅτι τὰ μόρια τοῦ ρευστοῦ κινοῦνται ἐπὶ ἐπιφανείας τοῦ δευτέρου βαθμοῦ.

Ἐὰν θεωρήσωμεν οἱονδήποτε σωμάτιον αἰωρούμενον ἐν κινήσει ἔν τινι ρευστῷ, δυνάμεθα νὰ θέσωμεν ἐν ταῖς ἐξισώσεσι 3) ἀντὶ u, v, w τὰ $\mathrm{B}a'\sqrt{t}$, $\mathrm{B}b'\sqrt{t}$, $\mathrm{B}c'\sqrt{t}$ καὶ ἀντὶ p, q, r τὰ $\mathrm{A}a\sqrt{t}$, $\mathrm{A}b\sqrt{t}$, $\mathrm{A}c\sqrt{t}$ (ὅπου a, b, c, a', b', c' ποσότητες ἀνεξάρτητοι τῶν x, y, z, t), προσέτι δὲ δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τὰς ποσότητας $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$, διὰ μεγάλας τιμὰς τῶν x, y, z, πολὺ μικρὰς καὶ ἐπομένως παραλειπτέας. Τότε δὲ ἀντὶ τῶν ἐξισώσεων 13), 14), 17) ἔχομεν

$$20)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{d\omega} = \mathrm{A}(cy-bz) - \mathrm{B}a' \\[2ex] \dfrac{dy}{d\omega} = \mathrm{A}(az-cx) - \mathrm{B}b' \\[2ex] \dfrac{dz}{d\omega} = \mathrm{A}(bx-ay) - \mathrm{B}c' \end{cases}$$

$$21)\quad ax+by+cz = -\mathrm{B}(aa'+bb'+cc')\omega + \mathrm{C}$$

$$22)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2(bx-ay)}{d\omega^2} = \mathrm{A}'(bx-ay) + \mathrm{B}_1 \\[2ex] \dfrac{d^2(cy-bz)}{d\omega^2} = \mathrm{A}'(cy-bz) + \mathrm{B}_2 \\[2ex] \dfrac{d^2(az-cx)}{d\omega^2} = \mathrm{A}'(az-cx) + \mathrm{B}_3 \end{cases}$$

ὅπου χάριν συντομίας ἐτέθη Α′ ἀντὶ $-\mathrm{A}^2k^2$, B_1 ἀντὶ $-\mathrm{AB}[c(aa'+bb'+cc') - k^2c]$, B_2 ἀντὶ $-\mathrm{AB}[a(aa'+bb'+cc') - k^2a]$, B_3 ἀντὶ $-\mathrm{AB}[b(aa'+bb'+cc') - k^2b]$ καὶ k^2 ἀντὶ $a^2+b^2+c^2$. Ἑκάστη τῶν ἐξισώσεων 22) εἶναι τῆς μορφῆς

$$\frac{d^2\vartheta}{d\omega^2} = g\vartheta + f,$$

ἐξ ἧς

$$\varepsilon)\quad \frac{d\vartheta}{d\omega} = \sqrt{g\vartheta^2 + 2f\vartheta + h}$$

Καὶ διὰ μὲν $g>0$ ἔχομεν

$$e^{\sqrt{g}(\omega+h)}=f+g\vartheta+\sqrt{g(g\vartheta^2+2f\vartheta+h)}$$

διὰ δὲ $g<0$ ἔχομεν

$$\eta\mu\,(\omega+h')\sqrt{-g}=-\frac{f+g\vartheta}{\sqrt{f^2-gh}}$$

ὅπου h καὶ h' σταθεραὶ τῆς ὁλοκληρώσεως. Ὅθεν συνάγεται διὰ $g=-A^2k^2<0$

$$23)\quad\left\{\begin{aligned}&A^2k^2(bx-ay)-B_1=\sqrt{B_1^2+A^2k^2h_1}\,.\\&\qquad.\eta\mu\,(\omega+h_1')Ak\\&A^2k^2(cy-bz)-B_2=\sqrt{B_2^2+A^2k^2h_2}\,.\\&\qquad.\eta\mu\,(\omega+h_2')Ak\\&A^2k^2(az-cx)-B_3=\sqrt{B_3^2+A^2k^2h_3}\,.\\&\qquad.\eta\mu\,(\omega+h_3')Ak\end{aligned}\right.$$

Αἱ σταθεραὶ h_1, h_2, h_3, h_1', h_2', h_3' ὁρίζονται ἐκ τῶν ἐξισώσεων ε) καὶ 23) διὰ $t=0$. Καὶ αἱ μὲν ἐξισώσεις 23) παρέχουσι τὴν σχετικὴν πρὸς τὸ σωμάτιον κίνησιν πάντων τῶν μορίων τοῦ ρευστοῦ, αἱ δὲ ἐξισώσεις 1), ἐν αἷς ἀντικαθίστανται αἱ τιμαὶ τῶν x, y, z εἰλημμέναι ἐκ τῶν 23), παρέχουσι τὴν ἀπόλυτον κίνησιν αὐτῶν. Ἡ δὲ ἀπαλοιφὴ τοῦ ω ἐκ τῶν 23), μετὰ τὴν ἀνάπτυξιν τῶν $\eta\mu\,Ak(\omega+h_1')$, $\eta\mu\,Ak(\omega+h_2')$, $\eta\mu\,Ak(\omega+k_3')$, ἄγει ὡς καὶ ἀνωτέρω [19)] εἰς τρεῖς ἐξισώσεις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ πρὸς x, y, z καὶ ἑπομένως τὰ μόρια τοῦ ρευστοῦ κινοῦνται ἐπὶ ἐπιφανειῶν τοῦ δευτέρου βαθμοῦ.

Ἐν Ἀθήναις κατὰ Νοέμβριον 1909.

ΑΘ. ΚΑΡΑΓΙΑΝΝΙΔΗΣ

ΗΛΕΚΤΡΟΚΙΝΗΣΙΣ

ΤΩΝ ΒΑΥΑΡΙΚΩΝ ΣΙΔΗΡΟΔΡΟΜΩΝ

Ἡ βαυαρικὴ κυβέρνησις πρὸς μετατροπὴν τῆς κινητηρίου δυνάμεως τῶν σιδηροδρόμων τοῦ κράτους, μεταξὺ τῶν ἄλλων ἠθέλησε νὰ χρησιμοποιήσῃ καὶ τὰ ὕδατα τῆς λίμνης Walcheusee ἐν συνδυασμῷ μετὰ τῶν ὑδάτων τοῦ ποταμοῦ Isar καὶ Riss.

Πρὸς τὸν σκοπὸν τοῦτον ἐκήρυξε διεθνῆ διαγωνισμὸν πρὸς ὑποβολὴν μελετῶν καὶ σχεδίων, ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ὁποίων νὰ προβῇ εἰς τὴν ἐκτέλεσιν τούτου.

Διετέθησαν τρία βραβεῖα· πρῶτον ἓν βραβεῖον 20,000 μάρκων, δεύτερον 15,000, τρίτον 10,000 καὶ προσέτι ἄλλα τρία τῶν 5,000 μάρκ.

Συμμετέσχον ἐν ὅλῳ τριάκοντα καὶ ἓν καταστήματα.

Ἡ ἑλλανόδικος ἐπιτροπὴ ὑπὸ τὴν προεδρείαν τοῦ ὑπουργικοῦ συμβούλου Hensel ἀπένειμε τὸ πρῶτον βραβεῖον εἰς τὴν μελέτην «ἁπλοῦν ἀλλ' ἀσφαλὲς» τῶν καταστημάτων Dyckerhof & Widmann A. G. συνεργαζομένου τοῦ ἀνωτέρου τεχνικοῦ συμβούλου κ. Kinzer (τοῦ διευθύνοντος τὴν μελέτην τῆς μεταφορᾶς τῶν ὑδάτων τῆς Στυμφαλίας) καὶ τοῦ μηχανουργείου Augsburg-Nürnberg A. G. σμνεργαζομένου τοῦ καθηγητοῦ Reichel καθὼς καὶ τῶν ἐργοστασίων Siemens-Schuckert ἐν Βερολίνῳ.

Τῇ ἀδείᾳ τοῦ κ. Kinzer, σχόντος τὴν καλωσύνην νὰ θέσῃ εἰς τὴν διάθεσιν ἡμῶν τά τε σχέδια καὶ τὴν ἔκθεσιν τῆς μελέτης, ἐν γενικαῖς γραμμαῖς θὰ προσπαθήσωμεν νὰ περιγράψωμεν τὰ αἰτηθέντα καὶ τὸν τρόπον τῆς λύσεως τοῦ τεθέντος ζητήματος.

Ἐζητήθησαν τὰ ἑξῆς:

1) Ἡ ὅσον τὸ δυνατὸν οἰκονομικωτέρα χρησιμοποίησις τῶν διαθεσίμων ὑδάτων καὶ τῆς μεταξὺ τοῦ ποταμοῦ Isar καὶ τῆς λίμνης Walcheusee ὑπαρχούσης διαφορᾶς ὕψους.

2) Ἡ δυνατὴ ἐπέκτασις τῆς ἐγκαταστάσεως διανεμομένη εἰς δύο ἢ καὶ περισσοτέρας περιόδους κατασκευῆς.

3) Προσδιορισμὸς τῶν μέσων δι' ὧν κατὰ καιροὺς θὰ γείνεται ἡ ἀπομάκρυνσις τῶν χαλίκων κλπ. ὡς καὶ ἡ μεταφορὰ ξυλείας διὰ τῶν ποταμῶν Isar καὶ τῶν παραποτάμων.

4) Ἡ κατὰ τὸ ἐφικτὸν διατήρησις τῆς φυσικῆς καλλονῆς τῆς λίμνης Walcheusee, τῆς ὁποίας ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὕδατος κατὰ τὴν πρώτην περίοδον δὲν ἐπιτρέπεται νὰ κατέλθῃ πλέον τῶν 3.5 μ.

5) Ἡ δυναμικὴ ἐγκατάστασις νὰ δύναται ἐκ διαλειμμάτων νὰ ἐπαρκῇ διὰ τριπλασίαν ἐργασίαν τῆς συνήθους μέσης ἐργασίας.

Ἡ τοῦ πρώτου βραβείου τυχοῦσα λύσις ἔγκειται ἐν τοῖς ἀκολούθοις:

Πρώτη περίοδος κατασκευῆς (σχῆμα 1) περιοριζομένη διὰ τῆς καταπτώσεως τῆς ἐπιφανείας τῆς λίμνης μέχρι 3.5 μ.

Κατασκευὴ ἑνὸς διαφράγματος ἐν τῷ ποταμῷ Isar, μιᾶς σήραγγος ἐκ τοῦ διαφράγματος μέχρι τῆς λίμνης Walcheusee διὰ παροχὴν 22.5 μ³/δ.λ., ἐξ ὧν κατὰ τὴν πρώτην περίοδον ῥέουσι μόνον 15 μ³/δ.λ. Κατασκευὴ σήραγγος ἀπὸ Urfeld μέχρι τοῦ σταθμοῦ τῆς

(Ἡ συνέχεια ἐν σελίδι 118.)