ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ

ΜΗΝΙΑΙΟΝ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟΝ ΣΥΓΓΡΑΜΜΑ

ΤΟΥ ΕΛΛΗΝΙΚΟΥ ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΟΥ ΣΥΛΛΟΓΟΥ

Ετος ΙΑ΄. — ΑΘΗΝΑΙ, Φεβρουαριος 1911 — Αριθ. 10.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΣΥΜΒΟΛΗ

ΕΙΣ ΤΑΣ ΔΥΟ ΓΕΝΙΚΑΣ ΑΡΧΑΣ ΤΗΣ ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ

Κατὰ τὸν Clausius ἡ μὲν ἐνέργεια τοῦ κόσμου εἶναι σταθερά, ἡ δὲ ἐντροπὴ αὐτοῦ τείνει πρὸς μέγιστον. Ἡ κατανόησις τῶν νόμων τῶν διεπόντων τὰ ὑλικὰ συστήματα καθίσταται εὐχερεστέρα διὰ τῆς οἰκείας θεωρίας τῆς ἐνεργείας καὶ ἐντροπῆς αὐτῶν ἐν ταῖς ποικίλαις καταστάσεσιν, ἃς δύνανται νὰ λαμβάνωσιν. Αἱ διάφοροι τιμαὶ τῆς ἐνεργείας καὶ ἐντροπῆς χαρακτηρίζουσιν οὐσιωδῶς τὰ διάφορα ἀποτελέσματα τὰ παραγόμενα ὑπό τινος συστήματος μεταβαίνοντος ἀπό τινος καταστάσεως εἰς ἑτέραν ἢ διὰ τῆς θερμότητος ἢ δι᾽ ἄλλων μηχανικῶν ἐν γένει μέσων.

Τὸ ἀπαιτούμενον κριτήριον ἰσορροπίας συστήματός τινος ἐλευθέρου πάσης ἐξωτερικῆς ἐπηρείας δύναται νὰ διατυπωθῇ κατὰ Gibbs ὑπὸ τῆς ἑτέρας τῶν ἑπομένων δύο ἰσοδυνάμων προτάσεων: 1) πρὸς ἰσορροπίαν μεμονωμένου τινὸς συστήμματος πρέπει καὶ ἀρκεῖ, ἵνα πρὸς πάσας τὰς δυνατὰς μεταβολὰς τῆς καταστάσεως τὰς μὴ ἀλλοιούσας τὴν ἐνέργειαν αὐτοῦ ἡ μεταβολὴ τῆς ἐντροπῆς ἦναι ἢ $=0$ ἢ <0· 2) πρὸς ἰσορροπίαν μεμονωμένου τινὸς συστήματος πρέπει καὶ ἀρκεῖ, ἵνα πρὸς πάσας τὰς δυνατὰς ἀλλαγὰς καταστάσεως αὐτοῦ τὰς μὴ μεταβαλλούσας τὴν ἐντροπὴν αὐτοῦ, ἡ μεταβολὴ τῆς ἐνεργείας ἦναι ἢ $=0$ ἢ >0.

Ἡ μεγάλη σπουδαιότης τῶν δύο θεμελιωδῶν ἀρχῶν τῆς Θερμοδυναμικῆς, τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας καὶ τῆς μεταβολῆς τῆς ἐντροπῆς, διὰ πάντας τοὺς κλάδους τῆς φιλοσοφίας τῆς φύσεως καθίσταται ὁσημέραι ἐμφαντικωτέρα καὶ ἐπιζητεῖται ἤδη ἡ ἵδρυσις ἐπὶ τῆς ἀρχῆς τοῦ Meyer καὶ τῆς τοῦ Clausius (ἢ Carnot-Clausius), ἤτοι ἐπὶ μόνης τῆς Θερμοδυναμικῆς, ὅλου τοῦ οἰκοδομήματος τῆς Μαθηματικῆς φυσικῆς. Ἀλλ᾽ ἐδείχθη, ὅτι οὐδεμία ὑπάρχει ἀμφιβολία, ὅτι, ὡς ὁ νόμος τοῦ Newton ὁ ἐξαχθεὶς ἐκ τῶν νόμων τοῦ Kepler, οὕτω καὶ ὁ νόμος τοῦ Meyer ὁ ἐξαχθεὶς ἐξ ἐμπειρικῶν νόμων εἶναι ἀληθὴς μόνον κατὰ προσέγγισιν ἀπὸ μαθηματικῆς τοὐλάχιστον ἀπόψεως. Τὸ αὐτὸ σχεδὸν δύναται νὰ ῥηθῇ καὶ περὶ τοῦ νόμου τοῦ Clausius. Τὰ πρῶτα ἴχνη ἐρεύνης καὶ παραδοχῆς τῆς ἀρχῆς τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας ἀνέρχονται εἰς λίαν μεμακρυσμένας ἐποχὰς καὶ ἀναφέρονται ἰδίᾳ εἰς σχετικὰς ἐρεύνας περὶ ἀεικινήτου. Αἱ θεμελιώδεις ἀρχαὶ τῆς Μηχανικῆς δὲν ἐξαρκοῦσι πρὸς ἀπόδειξιν ἐν ἁπάσῃ αὐτῆς τῇ γενικότητι τῆς ἀρχῆς τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας, καταδεικνυομένης (μαθηματικῶς), ὁσάκις αἱ ἐσωτερικαὶ δυνάμεις τοῦ θεωρουμένου συστήματος ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας σχέσιν τινὰ καλουμένην συνάρτησιν τῶν δυνάμεων.

Ἡ Θερμοδυναμικὴ στηρίζεται, ὡς ἀνωτέρω εἴρηται, ἐπὶ τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας, ἧς σπουδαία μερικὴ περίπτωσις εἶναι ἡ ἀρχὴ τοῦ ἰσοδυνάμου τῆς θερμότητος, καὶ ἐπὶ τοῦ διασκεδασμοῦ τῆς ἐντροπῆς. Ἐν τῇ σπουδῇ τῆς θερμότητος ἐμφανίζονται δύο ἀναπόφευκτοι ἔννοιαι, ἡ τῆς (ἀπολύτου) θερμοκρασίας ϑ καὶ ἡ τοῦ ποσοῦ τῆς θερμότητος Q. Ἡ πυκνότης ϱ σώματός τινος ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς θερμοκρασίας καὶ ἐκ τῆς πιέσεως p καὶ ἑπομένως ὁ εἰδικὸς ὄγκος v αὐτοῦ ἐξαρτᾶται ἐκ τῶν δύο τούτων ποσοτήτων διά τινος σχέσεως $\sigma(p, v, \vartheta) = 0$, ἥτις καλεῖται θεμελιώδης σχέσις ἢ χαρακτηριστικὴ ἐξίσωσις τῆς καταστάσεως τοῦ σώματος.

Ἡ ἐντροπὴ S εἶναι ποσότης ὑπάρχουσα ἐν τῇ φύσει τοιαύτη, ὥστε ἐν πάσαις ταῖς μεταβολαῖς τῆς φύσεως πάντοτε κατὰ τὴν αὐτὴν μεταβάλλεται φοράν. Αἱ δὲ θερμοδυναμικαὶ γενικαὶ ἐξισώσεις δι᾿ ὑπόστροφα φαινόμενα ἔν τινι ὁμογενεῖ (μεμονωμένῳ) σώματι, ἐν τῷ ὁποίῳ διὰ τὴν ἰσορροπίαν τὸ ϑ ἔχει τὴν αὐτὴν τιμήν, εἶναι αἱ ἑπόμεναι:

$$\begin{cases} J dQ = dV + dW \\ \dfrac{dQ}{\vartheta} = dS \end{cases}$$

ἔνθα $J = 42\,200\,000\ g \frac{c^2}{s^2}$, dV ἡ μεταβολὴ τῆς ἐσωτερικῆς ἐνεργείας τοῦ σώματος καὶ dW ἡ τοῦ ὑπὸ ἐξωτερικῶν δυνάμεων παραγομένου ἔργου. Τὰ dV, dW καὶ dS δὲν δύνανται νὰ ἦναι πάντοτε τέλεια διαφορικά.

Ἐν τοῖς ἑπομένοις ἀποδεικνύω, πλὴν ἄλλων, ὅτι ἡ ἐντροπὴ S μετὰ τῶν σχετικῶν φαινομένων ἐν τοῖς ρευστοῖς τοὐλάχιστον προκύπτει ἐξ αὐτῶν τούτων τῶν ἐξισώσεων τῆς Μηχανικῆς τῶν ρευστῶν.

Ἡ πεῖρα διδάσκει, ὅτι πρὸς ἁπλῆν περιγραφὴν τῆς κινήσεως τῶν σωμάτων δέον (πβλ G. Kirchhoff, Mechanik, 1883) αἱ συνιστῶσαι $X_x, Y_y, \ldots$ τῆς πιέσεως p διὰ πᾶν ἀπειροστὸν μέρος σώματός τινος νὰ ἐξαρτῶνται μόνον ἐκ τῆς καταστάσεως καὶ ἐκ τῆς μεταβολῆς καταστάσεως τοῦ μέρους τούτου. Αἱ παραστάσεις $X_x, Y_y, \ldots$ εἶναι διάφοροι διὰ τὰ διάφορα σώματα.

Διὰ τὰ ρευστά, δι' ἃ δὲν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν ἡ τριβή, εἶναι:

$$Y_z = Z_x = X_y = 0$$
$$X_x = Y_y = Z_z$$

ἡ κοινὴ τιμὴ p τῶν X_x, Y_y, Z_z εἶναι ἡ πίεσις κατὰ τὸ θεωρούμενον σημεῖον ἐν τῷ χρόνῳ t διευθυνομένη καθέτως πρὸς πᾶν στοιχεῖον τῆς ἐπιφανείας τοῦ σώματος. Ὑπὸ δὲ τὰς συνθήκας ταύτας αἱ ἐξισώσεις τῆς κινήσεως διὰ τὴν ἐσωτερικὴν πίεσιν σώματός τινος στερεοῦ ἐλαστικοῦ:

$$1)\quad \begin{cases} \varrho \dfrac{d^2x}{dt^2} = \varrho X - \dfrac{\partial X_x}{\partial x} - \dfrac{\partial X_y}{\partial y} - \dfrac{\partial X_z}{\partial z} \\ \varrho \dfrac{d^2y}{dt^2} = \varrho Y - \dfrac{\partial Y_x}{\partial x} - \dfrac{\partial Y_y}{\partial y} - \dfrac{\partial Y_z}{\partial z} \\ \varrho \dfrac{d^2z}{dt^2} = \varrho Z - \dfrac{\partial Z_x}{\partial x} - \dfrac{\partial Z_y}{\partial y} - \dfrac{\partial Z_z}{\partial z} \end{cases}$$

καθίστανται

$$2)\quad \begin{cases} \varrho \dfrac{d^2x}{dt^2} = \varrho X - \dfrac{\partial p}{\partial x} \\ \varrho \dfrac{d^2y}{dt^2} = \varrho Y - \dfrac{\partial p}{\partial y} \\ \varrho \dfrac{d^2z}{dt^2} = \varrho Z - \dfrac{\partial p}{\partial z} \end{cases}$$

Πρὸς ταῖς τρισὶ ταύταις ἐξισώσεσι ταῖς συνδεούσαις τὰ πέντε ἄγνωστα x, y, z, ϱ, p ὑπάρχει καὶ τετάρτη συνδέουσα τὰς ποσότητας ϱ καὶ p δεδομένας ὑπὸ τῆς φύσεως τοῦ θεωρουμένου ρευστοῦ καὶ πέμπτη ἡ τῆς συνεχείας καλουμένη:

$$3)\quad \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \varrho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0$$

ἔνθα $u = \frac{dx}{dt},\ v = \frac{dy}{dt},\ w = \frac{dz}{dt}$.

Ἐὰν δὲ λαμβάνηται ὑπ ὄψιν καὶ ἡ ἐσωτερικὴ τριβὴ τοῦ ρευστοῦ εἶναι

$$4)\quad \begin{cases} X_x = p - 2k\dfrac{\partial u}{\partial x},\ Y_z = -k\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\right) \\ Y_y = p - 2k\dfrac{\partial v}{\partial y},\ Z_x = -k\left(\dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\right) \\ Z_z = p - 2k\dfrac{\partial w}{\partial z},\ X_y = -k\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right) \end{cases}$$

ὅπου k σταθερὰ ποσότης τοῦ ρευστοῦ.

Τεθείσθω νῦν, ὅτι ρευστόν τι εὑρίσκεται ἐν ἰσορροπίᾳ· αἱ ἐξισώσεις 2) καθίστανται:

$$5)\quad \begin{cases} X = \dfrac{1}{\varrho}\dfrac{\partial p}{\partial x} \\ Y = \dfrac{1}{\varrho}\dfrac{\partial p}{\partial y} \\ Z = \dfrac{1}{\varrho}\dfrac{\partial p}{\partial z} \end{cases}$$

Ἐὰν ἐν ταῖς ἐξισώσεσι ταύταις τὸ μὲν ϱ σημαίνῃ τὴν (ἀπόλυτον) θερμοκρασίαν ϑ (ἢ ἀνάλογον πρὸς αὐτὴν ποσότητα) σώματός τινος, τὸ δὲ p τὸ ποσὸν Q τῆς θερμότητος (ἢ ἀνάλογον πρὸς αὐτὸ ποσότητα) αὐτοῦ, ἦναι δὲ τὸ ϑ συνάρτησις τοῦ Q, αἱ συνιστῶσαι X, Y, Z καθίστανται αἱ μερικαὶ παράγωγοι πρὸς x, y, z, μιᾶς συναρτήσεως S καὶ ἑπομένως ὑπάρχει διὰ τὴν ἐντροπήν:

$$6)\qquad S = \int \frac{dQ}{\vartheta}$$

Ἐὰν ϑ ἦναι μονότιμος συνάρτησις τοῦ Q, καὶ ἡ ἐντροπὴ S εἶναι μονότιμος συνάρτησις τοῦ Q ἔχοντος τότε ἐν παντὶ σημείῳ τοῦ θεωρουμένου ἰσορροποῦντος σώματος μίαν τιμήν. Ἐὰν δὲ S ἦναι γνωστόν, καὶ Q εἶναι γνωστὸν μέχρι σταθερᾶς τινος ἀγνώστου ποσότητος, ὅπερ σημαίνει, ὅτι ἐν πάσῃ ἐπιφανείᾳ, ἐν ᾗ S εἶναι τὸ αὐτό, Q εἶναι ἐπίσης τὸ αὐτό. Ἐὰν δὲ ϑ ἦναι σταθερὰ ποσότης, προκύπτει ἐκ τῆς ἐξισώσεως 6):

$$7)\qquad Q = Q_0 + \vartheta S \quad ἢ \quad Q = \vartheta(S - S_0)$$

ὅπου Q_0 ἢ S_0 ἄγνωστός τις σταθερὰ ποσότης.

Ἐὰν κατὰ προσέγγισιν ληφθῇ $Q = c\vartheta$, ὅπου c σταθερὰ ποσότης, προκύπτει ἐκ τῆς ἐξισώσεως 6):

$$8)\qquad l\frac{Q}{Q_0} = \frac{1}{c}S$$

Ἐὰν δύο διάφορα σώματα (ρευστὰ ἐφάπτωνται ἑκατέρωθεν ἐπιφανείας τινός, διὰ πᾶν σημεῖον τῆς ἐπιφανείας ταύτης τὸ Q ἔχει τὴν αὐτὴν τιμήν. Ἐὰν δὲ ὑποτεθῇ, ὅτι τὸ μὲν S δι' ἀμφότερα τὰ ρευστὰ εἶναι τὸ αὐτό, αἱ δὲ θερμοκρασίαι αὐτῶν ϑ_1 καὶ ϑ_2 διάφοροι ἀλλήλων καὶ παρασταθῶσι διὰ dQ καὶ dS αἱ μεταβολαὶ τῶν Q καὶ S ἀπὸ σημείου τῆς θεωρουμένης ἐπιφανείας πρὸς ἕτερον πλησιέστατον, προκύπτει ἐκ τῆς 6) ἐξισώσεως:

$$\vartheta_1 dS = dQ, \qquad \vartheta_2 dS = dQ$$

ὅθεν
$$dQ = 0, \qquad dS = 0,$$

ἤτοι ἡ κοινὴ ἐφαπτομένη τῶν ρευστῶν ἐπιφάνεια πανταχοῦ αὐτῆς ἔχει τὸ αὐτὸ ποσὸν θερμότητος καὶ τὴν αὐτὴν ἐντροπὴν (ἀδιαβατικὸν φαινόμενον).

Αἱ ἐξισώσεις 2) μετατρέπονται κατὰ μὲν Lagrange εἰς τὰς ἐξισώσεις:

$$9)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2}\dfrac{\partial x}{\partial a} + \dfrac{d^2y}{dt^2}\dfrac{\partial y}{\partial a} + \dfrac{d^2z}{dt^2}\dfrac{\partial z}{\partial a} = \dfrac{\partial(V-P)}{\partial a} \\ \dfrac{d^2x}{dt^2}\dfrac{\partial x}{\partial b} + \dfrac{d^2y}{dt^2}\dfrac{\partial y}{\partial b} + \dfrac{d^2z}{dt^2}\dfrac{\partial z}{\partial b} = \dfrac{\partial(V-P)}{\partial b} \\ \dfrac{d^2x}{dt^2}\dfrac{\partial x}{\partial c} + \dfrac{d^2y}{dt^2}\dfrac{\partial y}{\partial c} + \dfrac{d^2z}{dt^2}\dfrac{\partial z}{\partial c} = \dfrac{\partial(V-P)}{\partial c} \end{cases}$$

κατὰ δὲ Euler εἰς τὰς ἐξισώσεις:

$$10)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} + w\dfrac{\partial u}{\partial z} = \dfrac{\partial(V-P)}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} + w\dfrac{\partial v}{\partial z} = \dfrac{\partial(V-P)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} + u\dfrac{\partial w}{\partial x} + v\dfrac{\partial w}{\partial y} + w\dfrac{\partial w}{\partial z} = \dfrac{\partial(V-P)}{\partial z} \end{cases}$$

ὅπου ὑποτίθεται:

$$X = \frac{\partial V}{\partial x}, \qquad Y = \frac{\partial V}{\partial y}, \qquad Z = \frac{\partial V}{\partial z}$$

$$u = \frac{dx}{dt}, \qquad v = \frac{dy}{dt}, \qquad w = \frac{dz}{dt}$$

$$11)\qquad P = \int \frac{dp}{\varrho}$$

τὸ δὲ ὁλοκλήρωμα δύναται νὰ λογισθῇ ἐκ τῆς σχέσεως τῆς ὑφισταμένης μεταξὺ p καὶ ϱ καὶ τὸ κατώτερον ὅριον τῆς ὁλοκληρώσεως δύναται νὰ ληφθῇ αὐτοβούλως.

Ἐὰν δὲ καὶ ἐνταῦθα ὑποτεθῇ, ὅτι σημαίνει τὸ μὲν ϱ ἀνάλογον πρὸς τὴν (ἀπόλυτον) θερμοκρασίαν ϑ ποσότητα, τὸ δὲ p ἀνάλογον πρὸς τὸ ποσὸν Q τῆς θερμότητος ποσόν, τὸ δὲ P τὴν ἐντροπὴν S αὐτοῦ, προκύπτει ἐκ τῆς ἐξισώσεως 11) διὰ $\vartheta =$ σταθ.

$$Q = \vartheta(S - S_0),$$

ἤτοι διὰ τὰ ἐν κινήσει ρευστὰ σταθερᾶς θερμοκρασίας, ὡς καὶ διὰ τὰ ἐν ἰσορροπίᾳ, τὸ ποσὸν τῆς θερμότητος εἶναι ἐν γένει ἀνάλογον τῆς ἐντροπῆς.

Ἐὰν δὲ ὑπάρχῃ δυναμικὸν τῶν ταχυτήτων, ἤτοι συνάρτησις φ (x, y, z, t) τοιαύτη, ὥστε

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \qquad v = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \qquad w = \frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

προκύπτει ἐκ τῶν ἐξισώσεων 10) διὰ τὴν ἐντροπὴν S:

$$S = V - \left[\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right)\right] + C,$$

ὅπου C δύναται νὰ ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ χρόνου t.

Διὰ δὲ $V = 0$, ἤτοι διὰ τὴν ἔλλειψιν δρωσῶν δυνάμεων, καὶ $C = 0$, ὅπερ οὐδαμῶς ἐπηρεάζει τὴν γενικότητα λαμβανομένης καταλλήλως τῆς ἐν τῷ φ προσθετέας συναρτήσεως τοῦ t, προκύπτει:

$$12)\qquad -S = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right)$$

'Εν δὲ τῇ περιπτώσει, καθ' ἣν αἱ ταχύτητες u, v, w καὶ αἱ μεταβολαὶ τοῦ Q καὶ τοῦ ϑ εἶναι πολὺ μικραὶ ποσότητες, δύναται νὰ τεθῇ:

$$13)\qquad dQ = \alpha^2 d\vartheta,$$

ὅπου α σταθερὰ θετικὴ ποσότης. 'Εὰν δὲ τεθῇ καὶ

$$14)\qquad \vartheta = \vartheta_0(1+\sigma),$$

ὅπου ϑ_0 σταθερά τις μικρὸν διαφέρουσα τῶν τιμῶν τῆς ϑ καὶ ληφθῶσιν ὑπ' ὄψιν μόνον ὅροι κατωτάτης τάξεως, προκύπτει ἐκ μὲν τῶν ἐξισώσεων 11), 13) καὶ 14)

$$15)\qquad S = \alpha^2\sigma,$$

ἐκ δὲ τῶν ἐξισώσεων 12) καὶ τῆς:

$$0 = \frac{\partial\vartheta}{\partial t} + \frac{\partial\vartheta\,\frac{\partial\varphi}{\partial x}}{\partial x} + \frac{\partial\vartheta\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}}{\partial y} + \frac{\partial\vartheta\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}}{\partial z}$$

προκύπτουσιν αἱ ἐξισώσεις:

$$16)\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \alpha^2\sigma = 0$$

$$17)\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0.$$

'Εντεῦθεν δὲ προκύπτει διὰ φ ἡ ἐξίσωσις:

$$18)\qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \alpha^2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right).$$

'Εὰν ἡ συνάρτησις φ ἦναι ἀνεξάρτητος τῶν x καὶ y, ἡ ἐξίσωσις 18) ἀνάγεται εἰς τὴν ἐξίσωσιν:

$$19)\qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \alpha^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

ἧς τὸ γενικὸν ὁλοκλήρωμα εἶναι:

$$20)\qquad \varphi = f_1(z-\alpha t) + f_2(z+\alpha t),$$

ὅπου f_1 καὶ f_2 οἱαιδήποτε συναρτήσεις τῶν ἐν αὐταῖς $z - \alpha t$ καὶ $z + \alpha t$.

ΑΘ. ΚΑΡΑΓΙΑΝΝΙΔΗΣ

ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΚΕΝΤΡΟΒΑΡΩΝ ΕΚ ΡΟΠΩΝ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ

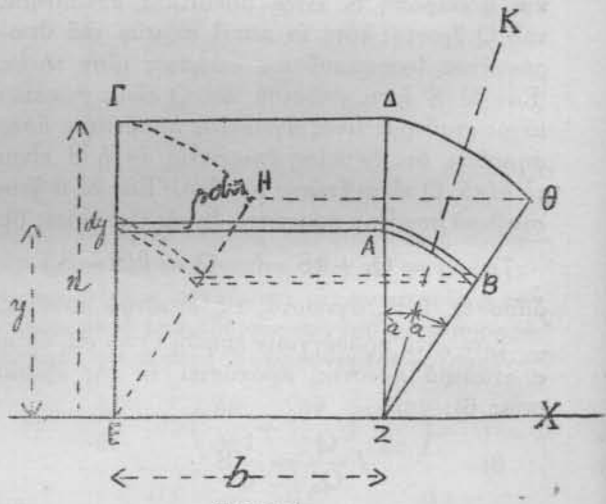
Δίδομεν εἰς τοὺς ἑπομένους μέθοδον πρὸς προσδιορισμὸν κεντροβαρῶν ἐκ περιστροφῆς στερεῶν συναρτήσει τῶν ῥοπῶν ἀδρανείας.

'Η μέθοδος αὕτη ἰσχύει διὰ πᾶν ἐκ περιστροφῆς στερεὸν οἱαδήποτε καὶ ἂν ᾖ ἡ περιστρεφομένη καὶ τὸ στερεὸν παράγουσα ἐπιφάνεια ὡς καὶ οἱαδήποτε ἂν ᾖ ὁ ἄξων καὶ ἡ γωνία περιστροφῆς.

'Ισχύει δὲ καὶ διὰ κεντροβαρῆ ἐπιφανειῶν ἐκ περιστροφῆς.

Τὴν μέθοδον ταύτην δὲν ἠδυνήθημεν ἡμεῖς τοὐλάχιστον νὰ ἀνεύρωμεν ἐν τῇ φιλολογίᾳ.

Ἔστω τὸ ἁπλοῦν ὀρθογώνιον ΓΔΕΖ περιστρεφόμενον περὶ τὸν ἄξονα x (ἰδὲ σχ. 1) κατὰ γωνίαν 2α καὶ σχηματίσαν ΓΔΗΘΕΖ ὄγκον V.



Σχῆμα 1.

'Εὰν θεωρήσωμεν τὸ εἰς ἀπόστασιν y διεγραμμισμένον στοιχεῖον ἐπιφανείας df, βλέπομεν ὅτι τοῦτο κατὰ τὴν περιστροφὴν διαγράφει στοιχειώδη ὄγκον dV παριστῶντα κυλινδρικὸν τμῆμα μὲ τόξον

$$AB = y\ \text{τοξ}\ 2\alpha$$

Εὐκόλως δὲ συνάγομεν ὅτι:

$dF = b\,dy$ καὶ κατὰ τὸ θεώρ. τοῦ Γουλδίνου

$dV = dF\,y\ \text{τοξ}\ 2\alpha.$

$$\text{'Επομένως}\qquad V = \text{τοξ}\ 2\alpha\int_0^h y\,dF = \text{τοξ}\ 2\alpha M$$

ἔνθα M ἡ στατικὴ ῥοπὴ τοῦ ὀρθογωνίου ὡς πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x ἴση, ὡς γνωστόν, πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου ἐπὶ τὴν ἀπόστασιν τοῦ κεντροβαροῦς αὐτοῦ ἀπὸ τὸν ἄξονα τῶν x.

Οὕτω λοιπὸν προσδιωρίσαμεν τὸν ὄγκον V τοῦ ἐκ περιστροφῆς στερεοῦ συναρτήσει τῆς στατικῆς ῥοπῆς M τοῦ ὀρθογωνίου ὡς πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x.

Πρὸς εὕρεσιν δὲ τοῦ κεντροβαροῦς τοῦ στερεοῦ ἐκ περιστροφῆς, κειμένου ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου συμμετρίας ἔχοντος ἴχνος ΖΚ ἔχομεν ἀνάγκην ἀποστάσεως τοῦ κεντροβαροῦς στερεοῦ ἀπὸ τοῦ ἄξονος x.