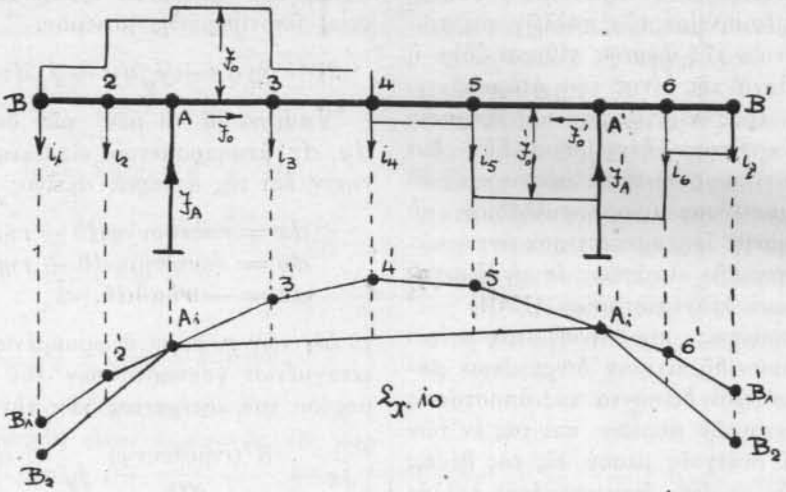
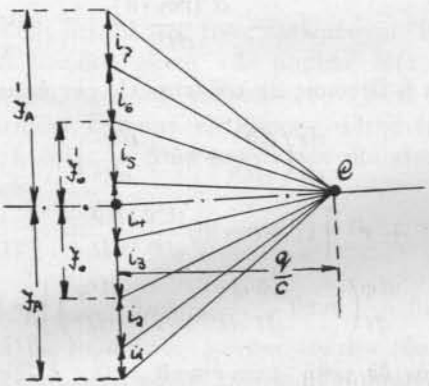
ἄκρων Α΄ καὶ Β΄ τουτέστι καὶ πρὸς τὰς τελευταίας εὐθείας C_1d καὶ C_2d ἀγόμεναι παράλληλοι αἵτινες τέμνονται κατά τι σημεῖον Μ΄΄ δίδουσιν ἡμῖν τὴν νέαν κλείουσαν.





Σχ. 10α

Περίπτωσις σύνθετος, ἀρκετοῦ δὲ ἐνδιαφέροντος δύναται νὰ θεωρηθῇ ἡ ἐν τῷ σχήματι (10) ἀπεικονιζομένη, καθ' ἣν ἀγωγός τις ΒΒ΄ τροφοδοτεῖται ἀπὸ διαφόρων σημείων Α καὶ Α΄. Ἡ γραφοστατικὴ διερεύνησις τῶν κατὰ μῆκος αὐτοῦ πτώσεων τάσεως, ὅσον καὶ τῆς ἐπ' αὐτοῦ διανομῆς τοῦ ῥεύματος, δύναται νὰ γίνῃ πάλιν διὰ κατασκευῆς τοῦ σχετικοῦ πολυγώνου τῶν ῥευμάτων ($q =$ σταθερὸν) ἀπό τινος πόλου C (Σχ. 10α) καὶ τῶν ἀντιστοίχων σχοινοειδῶν διὰ τὰ τμήματα ΑΒ — ΑΑ΄ — Α΄Β΄. Ἐν τῷ σχοινοεδεῖ τούτῳ διακρίνομεν τρεῖς κλειούσας, τὴν ἑνοῦσαν τὰ σημεῖα A_1 καὶ A'_1, τὴν $A_1{}' B_1$ παράλληλον πρὸς τὴν πλευρὰν C_1 τοῦ πολυγώνου τῶν ῥευμάτων, καὶ τὴν A'_1 B'_1 παράλληλον πρὸς τὴν πλευρὰν C_8 τοῦ αὐτοῦ πολυγώνου τῶν ῥευμάτων.

Αἱ ἄκραι πλευραὶ τοῦ σχοινοειδοῦς εἶναι κατὰ σειρὰν ταῖς C_2 καὶ C_7 παράλληλοι, ἐν ᾧ ἡ τῇ πρώτῃ κλειούσῃ A_1 A'_1 ἀγομένη παράλληλος C_4 ὁρίζει ἐπὶ τῆς κατακορύφου τῶν ῥευμάτων (Σχ. 10α) τὰς ἐντάσεις τῶν ῥευμάτων J_0 ἀπὸ τοῦ κόμβου Α πρὸς τὸν κόμβον Α΄, καὶ J'_0 κατὰ τὴν ἀντίθετον διεύθυνσιν Α΄Α. Ἡ κατὰ μῆκος τοῦ ἀναπτύγματος τοῦ ἀγωγοῦ ΒΒ΄ κλιμακωτὴ γραμμή, διὰ τῶν ὡς πρὸς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν τεταγμένων της δίδει ἰδέαν τῆς κατὰ μῆκος τοῦ ἀγωγοῦ τούτου διανομῆς τοῦ ῥεύματος.

(Ἕπεται συνέχεια.)

Γ. Κ. ΣΑΡΡΟΠΟΥΛΟΣ

ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΔΙΝΩΔΟΥΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΩΝ ΑΤΟΜΩΝ ΕΝ ΤΗ ΚΟΣΜΟΓΟΝΙΑ

Ὁ ἀσχολούμενος περὶ ὑποκείμενα τῆς Κοσμογονίας καὶ παρατηρῶν μετὰ προσοχῆς τὴν τάξιν καὶ ἁρμονίαν τὴν κρατοῦσαν ἐν τῇ ἐξελίξει τῶν πολλῶν καὶ ποικίλων οὐρανίων φαινομένων πείθεται ἀμέσως περὶ τῆς ὑπάρξεως νόμων διεπόντων τὸν Κόσμον, περὶ τῆς δυνάμεως τῶν ἀριθμῶν, οὓς οἱ Πυθαγόρειοι ὡς φύσει πρώτους ἀρχὰς ἔθεντο τῶν ὄντων. Ἡ κίνησις τῶν οὐρανίων σωμάτων διακρίνεται εἰς τρεῖς μερικὰς κινήσεις, τὴν περιστροφικήν, τὴν περιφορικὴν καὶ τὴν μεταβατικήν. Κατὰ τὸν νόμον τοῦ Newton ἐξηγεῖται κυρίως μόνον ἡ περιφορικὴ κίνησις καὶ αὕτη κατὰ προσέγγισιν διὰ μεμονωμένα τοὐλάχιστον μέχρι τοῦδε σώματα. Ἡ δὲ ὑπόθεσις τοῦ Laplace περὶ Κοσμογονίας ἀπεδείχθη ὑπὸ πολλῶν κατὰ τοὺς τελευταίους τούτους χρόνους διὰ τοῦ λογισμοῦ τῆς Μαθηματικῆς καὶ τῶν πολλῶν καὶ ποικίλων προόδων τῆς Φυσικῆς, εἰ μή τι ἄλλο. ἐλλιπὴς ἐν τῇ γενέσει τῶν κόσμων. Ἐν τῇ νεωτέρᾳ Φυσικῇ ὡς βάσις πρὸς ἑρμηνείαν τῶν πολλῶν καὶ ποικίλων φαινομένων τῆς φύσεως τίθεται ἰδίᾳ ἡ Δημοκρίτειος ἀρχὴ τῆς δίνης τῶν ἀτόμων.

Ἀπόπειραν πρὸς περιγραφὴν καὶ ἐξήγησιν τῶν οὐρανίων κινήσεων ἐπεχείρησα ἤδη διὰ τῆς δινώδους κινήσεως συνεχοῦς μέσου κατὰ τὸ ἔτος 1902 δημοσιεύσας μικρὸν φυλλάδιον, οὗ τινος τὰ πορίσματα λεπτομερέστερον ἀνετυπώθησαν μετὰ ἱστορικῆς συνόψεως ἐν τῇ Ἐπετηρίδι τοῦ Ἐθνικοῦ Πανεπιστημίου (1904).

Ἐν τοῖς ἑπομένοις προβαίνων περαιτέρω εὑρίσκω τὴν ἑλικοειδῆ κίνησιν δινουμένων μορίων, τὸν νόμον τὸν διέποντα τὰς ἀποστάσεις αὐτῶν ἀπὸ κεντρικῶν μορίων καὶ τὰς ἐκ τῶν κυμάνσεων τοῦ συνεχοῦς μέσου εἰς τὰς θέσεις καὶ κινήσεις τῶν μορίων ἀναφερομένας πολλὰς καὶ ποικίλας διαταράξεις ἢ ἀνωμαλίας.

---

1. Αἱ γενικαὶ ἐξισώσεις τῆς κινήσεως τῶν τελείων ῥευστῶν εἰσιν αἱ ἑπόμεναι:

$$1)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \varrho\,(X - j_x) \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \varrho\,(Y - j_y) \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \varrho\,(Z - j_z) \end{aligned} \right.$$

Ἐν ταῖς ἐξισώσεσι ταύταις X, Y, Z, p, ϱ εἶναι συναρτήσεις συνεχεῖς ὡρισμέναι καὶ πεπερασμέναι τῶν x, y, z, t καθ' ἅπασαν τὴν ἔκτασιν τοῦ ῥευστοῦ. Ταῖς ἐξισώσεσι ταύταις προσθετέα ἡ χαρακτηριστικὴ τῶν ῥευστῶν ἐξίσωσις

$$F(p, \varrho, \tau) = 0$$

μεταξὺ τῆς πιέσεως, τῆς πυκνότητος καὶ τῆς θερμοκρασίας ἐν σχέσει πρὸς τὸ Θερμοδυναμικὸν δυναμικὸν κατὰ Duhem καὶ ἡ ἐξίσωσις τῆς συνεχείας κατὰ Euler

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial(\varrho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\varrho w)}{\partial z} = 0$$

ὅπου u, v, w αἱ συνιστῶσαι τῆς ταχύτητος V.

Ἔστωσαν r, ϑ, ψ αἱ πολικαὶ συντεταγμέναι τοῦ μορίου M(x, y, z) καὶ τεθείσθω

$$\text{κ)}\quad P\,ds\,\text{συν}\,(P, V) - \frac{1}{\varrho}\,dp = K\,d\psi$$

ὅπου K μεταβλητή τις παράμετρος καὶ ψ ἡ καλουμένη συνάρτησις τῶν ἐπιταχύνσεων, ἥτις ἐνταῦθα εἶναι αὐτὴ ἡ γωνία ψ.

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων 1) προκύπτει, τῆς κινήσεως ὑποτιθεμένης μονίμου,

$$2)\quad j_x\,dx + j_y\,dy + j_z\,dz = K\,d\psi.$$

Ὑπάρχει δὲ τὸ μέν, τῶν διαφορικῶν dx, dy, dz ἀναφερομένων εἰς ἀπειροστὴν μετακίνησιν ἐπι τῆς σφαίρας ἀκτῖνος r

$$\begin{aligned} dx &= r\,\text{συν}\vartheta\,\text{συν}\psi\,d\vartheta - r\,\text{ημ}\vartheta\,\text{ημ}\psi\,d\psi \\ dy &= r\,\text{συν}\vartheta\,\text{ημ}\psi\,d\vartheta + r\,\text{ημ}\vartheta\,\text{συν}\psi\,d\psi \\ dz &= -\,r\,\text{ημ}\vartheta\,d\vartheta, \end{aligned}$$

τὸ δέ, τῶν r, ϑ, ψ θεωρουμένων ὡς τῶν συντεταγμένων (συναρτήσεων τοῦ χρόνου t) τοῦ μορίου τοῦ κατέχοντος νῦν τὴν θέσιν M

$$j_x = \frac{d^2(r\,\text{ημ}\vartheta\,\text{συν}\psi)}{dt^2},\quad j_y = \frac{d^2(r\,\text{ημ}\vartheta\,\text{ημ}\psi)}{dt^2},$$

$$j_z = \frac{d^2(r\,\text{συν}\vartheta)}{dt^2}.$$

Ὥστε ἡ ἐξίσωσις 2) τρέπεται εἰς τὴν ἑπομένην

$$\begin{aligned} 3)\quad & 2r\frac{dr}{dt}\left(\frac{d\vartheta^2}{dt^2} + \text{ημ}^2\vartheta\,\frac{d\psi^2}{dt^2}\right) + \\ & + r^2\left[(1 + \text{συν}^2\vartheta)\frac{d^2\vartheta}{dt^2}\,\frac{d\vartheta}{dt} + \right. \\ & \left. + \text{ημ}\vartheta\,\frac{d\psi}{dt}\left(\text{συν}\vartheta\frac{d\vartheta}{dt}\frac{d\psi}{dt} + \text{ημ}\vartheta\,\frac{d^2\psi}{dt^2}\right)\right] = K\,\frac{d\psi}{dt} \end{aligned}$$

Ἐὰν δὲ τεθῇ $z = r\,\text{συν}\vartheta = 0$, ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἀνάγεται εἰς τὴν ἑπομένην

$$4)\quad 2\,r\,\frac{dr}{dt}\frac{d\psi}{dt} + r^2\frac{d^2\psi}{dt^2} = K$$

ὅθεν

$$5)\quad r^2\,\frac{d\psi}{dt} = Kt + c\quad \text{(ἐμβαδ. ταχύτης)}$$

ὅπου c σταθερὰ ποσότης καὶ $\frac{d\psi}{dt}$ ἡ γωνιακὴ ταχύτης.

Ἐν δὲ τῇ ἐξισώσει κ) δυναταὶ πολλαὶ ὑποθέσεις. Ἐὰν π. χ. ὑποτεθῇ p=σταθ. καὶ P συν$(P, V) = \Lambda =$ σταθ., ἕπεται ἐκ τῆς σχέσεως κ)

$$\frac{ds}{d\psi} = \text{σταθ.}$$

καὶ κατὰ συνέπειαν διὰ $s = 2\pi r$ προκύπτει ἐκ τῆς ἐξισώσεως 5).

$$6)\quad r^3 = \lambda t^2 + \mu t + \nu$$

ἤτοι ὁ τρίτος νόμος τοῦ Kepler γενικώτερος (τῶν σταθερῶν τῆς ὁλοκληρώσεως μ καὶ ν δυναμένων νὰ ἔχωσι καὶ τὴν τιμὴν 0).

Ἀλλὰ τῆς κινήσεως ὑποτιθεμένης μονίμου ὑπάρχει

$$j_x dx + j_y dy + j_z dz = \tfrac{1}{2} d \, . \, V^2$$

καὶ ἑπομένως

$$7) \qquad V^2 = 2K\psi + c$$

ἐξ οὗ

$$8) \qquad t = \pm \sqrt{a\psi + \mathfrak{b}}$$

καὶ

$$9) \qquad r^3 = a\psi \pm \sqrt{a\psi + \mathfrak{b}} + \beta$$

ὅπου α, β, a, $\mathfrak{b}$ σταθεραὶ ποσότητες.

2 Ἡ ἐξίσωσις 9) εἶναι προφανῶς τῆς μορφῆς

$$10) \qquad R^3 = mw$$

m οὔσης μεταβλητῆς τινος παραμέτρου Ἐπειδὴ δὲ αἱ δινώδεις χῶναι τῶν μορίων $M(x, y, z)$ κέκτηνται πρὸς πᾶν ἐπίπεδον $z =$ σταθ κυκλικὴν τομὴν ἔχουσαν τὸ κέντρον αὐτῆς ἐπὶ τοῦ ΟΖ, ἡ ἐξίσωσις τῶν χωνῶν τούτων εἶναι τῆς μορφῆς

$$11) \qquad (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{m}{n} z$$

ὅπου n παράμετρός τις

Αἱ δὲ τομαὶ τῶν χωνῶν τούτων ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΖΟΧ, μόναι προδήλως χρήσιμοι πρὸς καθορισμὸν καὶ εὕρεσιν τοῦ νόμου τῶν ἀποστάσεων τῶν μορίων Μ ἀπὸ τῶν ἐπὶ τοῦ ΟΖ κειμένων κέντρων, εἶναι τῆς μορφῆς

$$12) \qquad z = Ax^3$$

ὅπου Α μεταβλητή τις παράμετρος. Διὰ δὲ $x = x_1$ εἶναι $z_1 = Ax_1^3$. Ἐὰν δὲ τεθῇ $Z_1 = a$, $A = \kappa^\nu$, $x_1^3 = \alpha$, προκύπτει ὁ νόμος $a = \alpha\kappa^\nu$ τῶν ἀποστάσεων τοῦ Gaussin (Comptes rendus, 1880). Ὁ δὲ νόμος οὗτος εἶναι ἀκριβέστερος τοῦ γνωστοῦ νόμου τοῦ Bode (λαμβανομένου μάλιστα ὑπ' ὄψιν, ὅτι οἱ πλανῆται δὲν κεῖνται πάντες ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου τῆς ἐκλειπτικῆς).

3. Τῆς κινήσεως ὑποτιθεμένης μονίμου ὑπάρχει, ὡς γνωστόν, πλῆθος ἄπειρον ἐπιφανειῶν 11) ἢ γενικώτερον πλῆθος ἄπειρον ἐπιφανειῶν

$$13) \qquad \varphi(q)(x^2+y^2)^3 - z^2 = f(x,y,z,q) = 0,$$

ὅπου $\varphi(q)$ συνεχὴς ὡρισμένη καὶ πεπερασμένη συνάρτησις τῆς παραμέτρου q, ἐπὶ τῶν ὁποίων δύνανται νὰ γραφῶσιν ἄπειρον πλῆθος γραμμῶν ῥεύματος καὶ γραμμῶν δίνης (λαμβανομένης κατὰ τὸν ὑπὸ Stokes δοθέντα μηχανικὸν ὁρισμόν). Ἐντεῦθεν δὲ συνάγεται, ὅτι ἐπὶ ἑκάστης τῶν ἐπιφανειῶν 13) τελοῦνται τρεῖς σύγχρονοι κινήσεις παντὸς μορίου Μ, ἡ περιστροφική, ἡ περιφορικὴ καὶ ἡ μεταβατικὴ κίνησις.

4. Πᾶσα ἐπιφάνεια 13) ἀποτελεῖ ἐπιφάνειαν *ἀσυνεχείας* (H. Poincaré, Théorie des tourbillons 1893· J. Hadamard, Sur la propagation des ondes 1903· P. Appell, Mécanique rationnelle 1909). Ἡ ἐπιφάνεια 13) διὰ τὸ q μετακινεῖται καὶ μεταμορφοῦται. Ἡ ταχύτης τῆς μετακινήσεως τοῦ κύματος τῆς ἐπιφανείας ταύτης ἐν παντὶ σημείῳ ὁρίζεται ὑπὸ τῆς σχέσεως

$$T = \frac{1}{h} \frac{\partial f}{\partial q}$$

ὅπου

$$h = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}$$

Ἐν δὲ τῇ παρούσῃ περιπτώσει εἶναι

$$14) \qquad T = \pm \frac{\varphi'(q)\ (x^2+y^2)^3}{\sqrt{36\,\varphi(q)^2(x^2+y^2)^5 + 4z^2}}$$

Ὅμοιος δὲ λογισμὸς παρέχει καὶ τὴν ταχύτητα G τῆς διαδόσεως τοῦ κύματος. Ἡ ταχύτης τῆς μετακινήσεως τοῦ κύματος ἔν τινι σημείῳ εἶναι ἡ συνισταμένη τῆς ταχύτητος τῆς διαδόσεως αὐτοῦ καὶ τῆς ταχύτητος τοῦ μέσου τῆς λογιζομένης κατὰ μῆκος τῆς καθέτου πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κύματος. Ἐπειδὴ δὲ δύναται πάντοτε νὰ ληφθῇ πᾶσα τιμὴ τοῦ q ὡς ἀρχική, ἀποδεικνύεται (*l. c*), ὅτι ὑπάρχει γεωμετρικὴ πρόοδος, ἧς λόγος $\frac{1}{h}\frac{\partial f}{\partial q}$ καὶ κατὰ συνέπειαν ἐπανευρίσκεται οὕτως ὁ νόμος τῶν ἀποστάσεων τοῦ Gaussin (*l. c*). Οὕτω δέ, ὡς ἐκ τῶν εἰρημένων καταφαίνεται, δύναταί τις νὰ λαμβάνῃ ὡς ἀφετηρίαν δινώδη κοσμογονίαν πρὸς περιγραφὴν καὶ ἐξήγησιν τῶν θέσεων καὶ τῶν κινήσεων τῶν οὐρανίων σωμάτων μετὰ τῶν παρομαρτουσῶν ἀνωμαλιῶν, τῆς ἐπιφανείας ἑκάστου κεντρικοῦ σώματος δυναμένης νὰ θεωρηθῇ ὡς ἐπιφανείας ἀσυνεχείας τοῦ κύματος. Ἀλλὰ λεπτομερείας περὶ τούτων ὡς καὶ περὶ τῶν σχετικῶν μαζῶν προσεχῶς ἐν τῷ «Ἀρχιμήδει».

Ἐν Ἀθήναις κατὰ Μάρτιον 1911

ΑΘ. ΚΑΡΑΓΙΑΝΝΙΔΗΣ