

# Εφαρμογή κριτηρίου παραβολοειδούς εκ περιστροφής στη Βραχομηχανική

## Application of a paraboloid criterion in Rock Mechanics

ΣΑΚΕΛΛΑΡΙΟΥ, Μ.Γ., Δρ Μηχ., Π.Μ. & Α.Τ.Μ., Αναπληρωτής Καθηγητής, Ε.Μ.Π.

**ΠΕΡΙΛΗΨΗ :** Στο παρόν άρθρο εισάγεται το κριτήριο του παραβολοειδούς εκ περιστροφής ως κριτήριο αστοχίας στη βραχομηχανική. Το κριτήριο αυτό έχει εισαχθεί από τον Θεοχάρη για την διερεύνηση των σύνθετων υλικών τα οποία παρουσιάζουν ανισοτροπία. Στην περίπτωση των ανισότροπων υλικών το κριτήριο παίρνει την γενικευμένη του μορφή ως ελλειπτικού παραβολοειδούς εκ περιστροφής, δηλαδή παραβολοειδές του οποίου η τομή με επίπεδο κάθετο στον άξονά του είναι έλλειψη. Ως παράδειγμα εφαρμογής του, εξετάζεται το πρόβλημα της εκτίμησης του εύρους της ζώνης αστοχίας γύρω από σήραγγα κυκλικής διατομής σε ισότροπο (υδροστατικό) τασικό πεδίο.

**ABSTRACT :** In this paper the paraboloid criterion has been introduced as a rock mechanics criterion. This criterion has been introduced by Theocaris for the investigation of anisotropic composite materials. In case of anisotropic materials, the criterion takes its general form as an elliptical paraboloid surface, that is, a paraboloid with an elliptical section. As an application, the problem of the calculation of the radius of plastic zone around a cyclic opening under isotropic field stress has been presented.

### 1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο παρόν άρθρο εισάγεται το κριτήριο του παραβολοειδούς εκ περιστροφής ως κριτήριο αστοχίας στη βραχομηχανική. Το κριτήριο αυτό έχει εισαχθεί από τον Θεοχάρη για την διερεύνηση των σύνθετων υλικών τα οποία παρουσιάζουν ανισοτροπία. Στην περίπτωση των ανισότροπων υλικών το κριτήριο παίρνει την γενικευμένη του μορφή ως ελλειπτικού παραβολοειδούς εκ περιστροφής, δηλαδή παραβολοειδές του οποίου η τομή με επίπεδο κάθετο στον άξονά του είναι έλλειψη. Πρόκειται, δηλαδή, για κριτήριο το οποίο μπορεί να περιγράψει την αστοχία ισότροπων όσο και ανισότροπων υλικών, το οποίο εκφράζεται ως συνάρτηση και των τριών κυρίων τάσεων. Βασική παράμετρος του κριτηρίου είναι ο λόγος της αντοχής σε μονοαξονική θλίψη προς την αντοχή σε μονοαξονικό εφελκυσμό για κάθε κύριο άξονα ανισοτροπίας του υλικού. Στην περίπτωση ισότροπων υλικών, παράμετρος του κριτηρίου

είναι ο λόγος της αντοχής σε μονοαξονική θλίψη προς την αντοχή σε μονοαξονικό εφελκυσμό.

Η ιδιότητα αυτή το καθιστά χρήσιμο για εφαρμογή στην βραχομηχανική όπου ο λόγος των αντοχών υπεισέρχεται στο εμπειρικό κριτήριο Hoek-Brown, η δε διακύμανση της τιμής αυτού του λόγου είναι και ο βασικός λόγος για την αδυναμία εφαρμογής του κριτηρίου Griffith το οποίο προβλέπει σταθερή τιμή του λόγου των αντοχών και ίση προς 8.

Η εφαρμογή ενός κριτηρίου, το οποίο θεμελιώνεται σε βασικές προτάσεις της Μηχανικής και εφαρμόζεται σε ισότροπα όσο και σε ανισότροπα υλικά, έχει θεωρητικό και πρακτικό ενδιαφέρον.

Ως παράδειγμα εφαρμογής του, εξετάζεται το πρόβλημα της εκτίμησης του εύρους της ζώνης αστοχίας γύρω από σήραγγα κυκλικής διατομής σε ισότροπο (υδροστατικό) τασικό πεδίο.

Η συμμετρία του προβλήματος έχει ως αποτέλεσμα τον σχηματισμό κυκλικής ζώνης

αστοχίας, όπως άλλωστε συμβαίνει και με την εφαρμογή των κριτηρίων Mohr-Coulomb, Hoek-Brown, Tresca και Von-Mises για το ίδιο πρόβλημα, και γίνεται σύγκριση μεταξύ των κριτηρίων Παραβολοειδούς και Hoek-Brown.

## 2. ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΑΣΤΟΧΙΑΣ

### 2.1 Εισαγωγή

Τα κριτήρια αστοχίας είναι σχέσεις μεταξύ των τάσεων, η ισχύς των οποίων δηλώνει την αστοχία του υλικού, υπό την έννοια των μη αντιστρεπτών ανηγμένων παραμορφώσεων (τροπών). Στην βραχομηχανική, η τάση αστοχίας δεν συμπίπτει γενικά με τη μέγιστη τάση.

Στα υπόγεια έργα, όπου τα τοιχώματα των εκσκαφών αποτελούν επιφάνειες επαπτόμενες των κυρίων επιπέδων, τα κριτήρια αστοχίας εκφράζονται ως σχέσεις μεταξύ των κυρίων τάσεων ή των αναλλοίωτων ποσοτήτων. Στα πρηνή, όπου η αστοχία εκδηλώνεται ως αποτέλεσμα διάτμησης σε κάποια επιφάνεια ολίσθησης, τα κριτήρια διατυπώνονται με σχέσεις ορθών και διατμητικών τάσεων, π.χ. το κριτήριο Mohr-Coulomb.

Ακολουθώς παρουσιάζονται οι εκφράσεις των κυριότερων κριτηρίων.

Καταρχάς αναφέρεται το κριτήριο Tresca. Μετά παρουσιάζεται το κριτήριο Von Mises λόγω της σπουδαιότητάς του, το οποίο έχει το χαρακτηριστικό ότι παριστάνεται στον χώρο των κυρίων τάσεων από κυλινδρική επιφάνεια αστοχίας.

Ακολουθώς παρουσιάζεται το κριτήριο Griffith το οποίο, εκτός της διαφορετικής θεμελίωσής του, παρουσιάζει το χαρακτηριστικό της παραβολοειδούς απεικόνισής του. Εμπειρική τροποποίηση αυτού του κριτηρίου αποτελεί το εμπειρικό κριτήριο Hoek-Brown. Τέλος, εισάγεται το παραβολοειδές εκ περιστροφής, το οποίο και εφαρμόζεται για τον υπολογισμό της ακτίνας της πλαστικής ζώνης.

### 2.2 Κριτήριο Tresca

Σύμφωνα με αυτό το κριτήριο το υλικό αστοχεί όταν η μέγιστη διατμητική τάση παίρνει μία τιμή χαρακτηριστική για το υλικό:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = S_1 - S_3 = \sigma_0 \quad (1)$$

όπου  $\sigma_0$  είναι η μονοαξονική αντοχή σε εφελκυσμό ή θλίψη.

Λόγω της απλότητας της μαθηματικής του διατύπωσης, το κριτήριο αυτό είναι το μόνο για το οποίο υπάρχει (σύμφωνα με τη γνώση του συγγραφέα) λύση κλειστής μορφής για το εύρος και το σχήμα της πλαστικής ζώνης για τη γενική περίπτωση τασικού πεδίου με  $k \neq 1$  (Savin, 1961).

### 2.3 Κριτήριο Von Mises

Ο Von Mises υπέθεσε ότι η θεωρία αστοχίας πρέπει να εκφράζεται συναρτήσει των αναλλοίωτων των αποκλινουσών τάσεων  $J_1$ ,  $J_2$  και  $J_3$

Αφού  $J_1=0$ , το κριτήριο εκφράζεται ως εξής:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2 \cdot \sigma_0^2 \quad (2)$$

όπου  $\sigma_0$  είναι η μονοαξονική αντοχή.

### Παρατήρηση

Γενικά αυτό το κριτήριο δεν είναι ικανοποιητικό για τα πετρώματα. Αιτία αυτού του συμπεράσματος είναι η μη ικανοποιητική εκτίμηση της συμβολής της ενδιάμεσης κύριας τάσης.

### 2.4 Κριτήριο Griffith

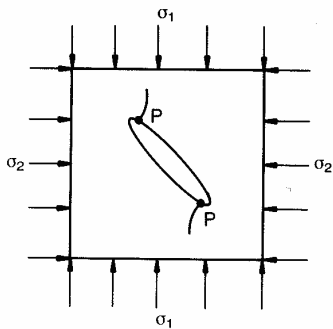
Ο Griffith το 1921 (Jaeger and Cook), πρότεινε ένα κριτήριο για την ερμηνεία της ψαθυρής θραύσης του χάλυβα στους κινητήρες των αεροπλάνων. Για την τεκμηρίωση της θεωρίας του έκανε σειρά πειραμάτων σε γυαλί, με την υπόθεση ότι η θραύση έχει ως σημεία εκκίνησης ρωγμές οι οποίες υπάρχουν στο υλικό και προκαλούν συγκέντρωση των τάσεων "Σχήμα 1". Οι αιχμές δηλαδή των ρωγμών, όπου η ακτίνα καμπυλότητας είναι πολύ μικρή, προκαλούν μία τασική «ιδιομορφία».

Αν και η θεωρία του Griffith δεν μπορεί να εφαρμοστεί στα πετρώματα ως έχει, αποτελεί μία βάση για την ερμηνεία της επιρροής προϋπαρχουσών ρωγμών στο υλικό.

Η πλέον σημαντική συμβολή της θεωρίας αυτής είναι η ενεργειακή της θεμελίωση καθώς η βασική της υπόθεση είναι ότι: **μία προϋπάρχουσα ρωγμή θα επεκταθεί όταν η συνολική δυναμική ενέργεια του συστήματος των φορτίων και του υλικού μειώνεται ή παραμένει σταθερή για μία αύξηση του μήκους της ρωγμής.**

Η ενέργεια ενός συστήματος μπορεί να μεταβληθεί για τρεις λόγους:

- Η δημιουργία νέων επιφανειών των ρωγμών λόγω θραύσης
- Μεταβολή της ελαστικής ενέργειας παραμορφώσεων του δείγματος και



Σχήμα 1: Εκκίνηση ρωγμής από το σύνορο εγκοπής ελλειπτικού σχήματος υπό διαξονική θλίψη

Figure 1: Crack propagation from the boundaries of an elliptical slit under biaxial compression

- Μεταβολή της δυναμικής ενέργειας του συστήματος φόρτισης.

Στην περίπτωση θλιπτικού τασικού πεδίου, επί πλέον των ενεργειακών μεταβολών υπάρχει και η συνθήκη ότι στην περιοχή των αιχμών των ρωγμών αναπτύσσονται εφελκυστικές τάσεις οι οποίες δεν μπορούν να ξεπεράσουν ένα όριο.

Το κριτήριο Griffith έχει την ακόλουθη διατύπωση:

$$\sigma \geq \sqrt{\frac{2 \cdot E \cdot a}{\pi \cdot c}} \quad (3)$$

όπου  $E$  το μέτρο ελαστικότητας,  $a$  είναι η ενέργεια ανά μονάδα επιφάνειας,  $c$  είναι το ημιμήκος του μεγάλου άξονα της έλλειψης και  $\sigma$  είναι η εφελκυστική τάση η οποία προκαλεί εκκίνηση διάδοσης ρωγμής.

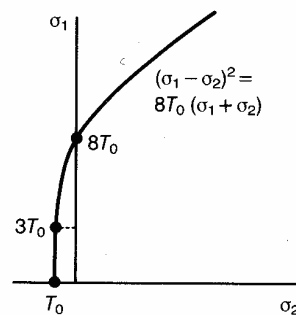
Εάν θελήσουμε να εφαρμόσουμε το κριτήριο Griffith στην περίπτωση μονοαξονικής θλίψης θα έχουμε το πρόβλημα της αλληλεπίδρασης των τοιχωμάτων της ρωγμής και το ενδεχόμενο της τριβής. Αυτό σημαίνει ότι αλλάζουν οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος. Έχουν γίνει διάφορες προτάσεις για την αντιμετώπιση αυτού του προβλήματος. Αν υποθέσουμε ότι η ρωγμή παραμένει ανοιχτή, ότι δηλαδή δεν έχουμε τάσεις στα τοιχώματα, θα ισχύει:

$$(\sigma_1 - \sigma_3)^2 = 8 \cdot \sigma_t \cdot (\sigma_1 + \sigma_3) \quad (4)$$

Εάν

$$\sigma_3 = 0 \Rightarrow \sigma_1 = 8 \cdot \sigma_t \quad (5)$$

Ο λόγος δηλαδή της αντοχής σε θλίψη προς την αντοχή σε εφελκυσμό έχει τη σταθερή τιμή 8. Αυτό το συμπέρασμα είναι ένας περιορισμός για την εφαρμογή του κριτηρίου Griffith στη βραχομηχανική.



Σχήμα 2: Γραφική παράσταση του κριτηρίου Griffith σε δύο διαστάσεις.

Figure 2: The failure envelope according to Griffith criterion in 2 dimensions.

Οι Hoek & Brown βασίστηκαν στην ενεργειακή θεμελίωση του κριτηρίου αυτού και το τροποποίησαν, εισάγοντας το ομώνυμο εμπειρικό κριτήριο, έτσι ώστε να ισχύει στο ακέραιο πέτρωμα αλλά και στη βραχομάζα.

Πέραν της συμβολής του με την ενεργειακή θεμελίωση, το κριτήριο Griffith έχει την βασική ιδιότητα ότι προβλέπει επιφάνεια αστοχίας σχήματος παραβολοειδούς “Σχήμα 2”. Η μορφή αυτή συμφωνεί με τα αποτελέσματα τριαξονικών δοκιμών πετρωμάτων και σε αυτό ακριβώς το δεδομένο βασίστηκαν οι Hoek και Brown όταν εισήγαγαν το εμπειρικό τους κριτήριο το 1981, ως τροποποίηση του κριτηρίου Griffith ώστε η περιβάλλουσα αστοχίας να προσαρμόζεται στους κύκλους Mohr τριαξονικών δοκιμών.

## 2.5 Το κριτήριο αστοχίας του παραβολοειδούς εκ περιστροφής

Σύμφωνα με τον Π. Σ. Θεοχάρη (Theocaris, 1983, 1989), είναι δυνατή η έκφραση ενός κριτηρίου αστοχίας για ισότροπα μέσα, τα οποία χαρακτηρίζονται από διαφορετική αντοχή σε θλίψη και εφελκυσμό. Το κριτήριο αυτό έχει σαφή ενεργειακή θεμελίωση καθώς η αστοχία γίνεται όταν η ελαστική στροφική ενέργεια λάβει κάποια κρίσιμη τιμή που εξαρτάται από την υδροστατική συνιστώσα.

Έτσι, συμμετέχουν εξίσου οι ενέργειες συνόγκου και σύμμορφης παραμόρφωσης. Το κριτήριο που πρότεινε ο Θεοχάρης, όταν παρασταθεί σε χώρο  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ , έχει παραβολική επιφάνεια και αξονική συμμετρία, συνεπώς είναι ένα παραβολοειδές εκ περιστροφής με άξονα τον υδροστατικό άξονα. Ανήκει δε στην οικογένεια του κριτηρίου του ελλειπτικού παραβολοειδούς (Theocaris, Filippidis, 1987).

Το κριτήριο αστοχίας γράφεται ως :

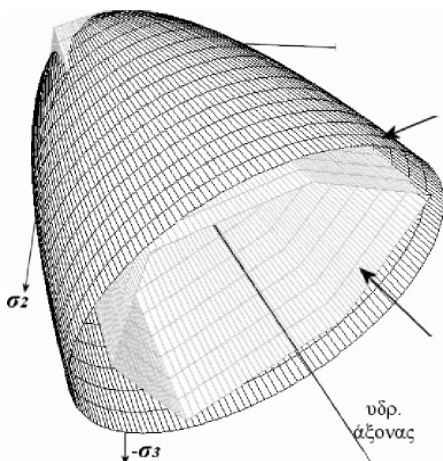
$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + 2 \cdot (R - 1) \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \cdot \sigma_t = 2 \cdot R \cdot \sigma_t^2 \quad (6)$$

Η παράμετρος  $\sigma_t$  είναι η μονοαξονική αντοχή σε εφελκυσμό ενώ η παράμετρος  $R$ , ο λόγος της μονοαξονικής αντοχής σε θλίψη προς τη μονοαξονική αντοχή σε εφελκυσμό :

$$R = \frac{\sigma_c}{\sigma_t} \quad (7)$$

Η γεωμετρική απεικόνιση της επιφάνειας αστοχίας του κριτηρίου, φαίνεται στο "Σχήμα 3".

Με γενίκευση του κριτηρίου του παραβολοειδούς, ώστε να εφαρμόζεται και στην περίπτωση των ανισότροπων υλικών, προκύπτει το ελλειπτικό παραβολοειδές, το οποίο είναι παραβολοειδές με τομή κάθετη στον άξονα συμμετρίας ελλειπτικού σχήματος. Υπ'αυτήν την μορφή ερμηνεύει την συμπεριφορά ανισότροπων υλικών.

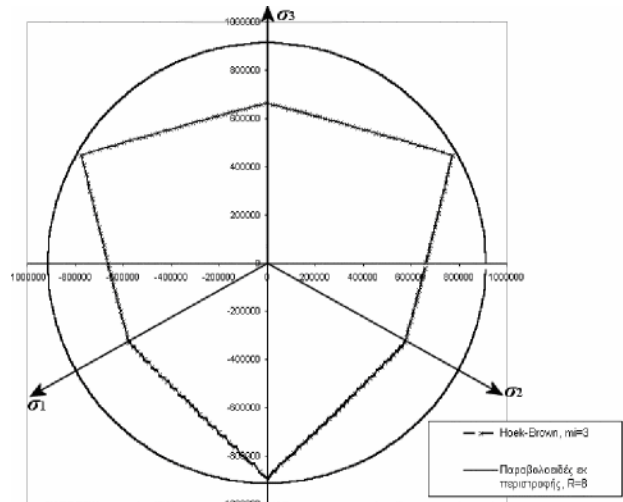


Σχήμα 3: Η επιφάνεια αστοχίας του παραβολοειδούς ως περιβάλλουσα την επιφάνεια του κριτηρίου Hoek-Brown ( $R=8$ ,  $m_i=3$ ) (Κοζάνης, 2002).

Figure 3: Failure surface of paraboloid as envelope of Hoek-Brown failure surface ( $R=8$ ,  $m_i=3$ ) (Kozanis, 2002).

Σημειώνεται ότι για  $R=1$  το κριτήριο του παραβολοειδούς ταυτίζεται με το κριτήριο Von Mises.

Στο "Σχήμα 4" φαίνεται τομή των κριτηρίων του Παραβολοειδούς και του Hoek-Brown.



Σχήμα 4: Τομή των δυο επιφανειών κάθετη στον άξονα για  $I_1=1.29$  MPa (Κοζάνης, 2002).

Figure 4: Normal section of the two surfaces for  $I_1=1.29$  MPa (Kozanis, 2002).

Η εξίσωση (8) είναι η μαθηματική διατύπωση του ελλειπτικού παραβολοειδούς.

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \frac{1}{\sigma_{c1} \cdot \sigma_{t1}} \cdot \sigma_1^2 + \frac{1}{\sigma_{c2} \cdot \sigma_{t2}} \cdot \sigma_2^2 + \frac{1}{\sigma_{c3} \cdot \sigma_{t3}} \cdot \sigma_3^2 - \left( \frac{1}{\sigma_{c1} \cdot \sigma_{t1}} + \frac{1}{\sigma_{c2} \cdot \sigma_{t2}} - \frac{1}{\sigma_{c3} \cdot \sigma_{t3}} \right) \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 - \left( \frac{1}{\sigma_{c2} \cdot \sigma_{t2}} + \frac{1}{\sigma_{c3} \cdot \sigma_{t3}} - \frac{1}{\sigma_{c1} \cdot \sigma_{t1}} \right) \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 - \left( \frac{1}{\sigma_{c1} \cdot \sigma_{t1}} + \frac{1}{\sigma_{c3} \cdot \sigma_{t3}} - \frac{1}{\sigma_{c2} \cdot \sigma_{t2}} \right) \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_3 + \left( \frac{\sigma_{c1} - \sigma_{t1}}{\sigma_{c1} \cdot \sigma_{t1}} \right) \cdot \sigma_1 + \left( \frac{\sigma_{c2} - \sigma_{t2}}{\sigma_{c2} \cdot \sigma_{t2}} \right) \cdot \sigma_2 + \left( \frac{\sigma_{c3} - \sigma_{t3}}{\sigma_{c3} \cdot \sigma_{t3}} \right) \cdot \sigma_3 - 1 = 0 \quad (8)$$

### 3. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΑΚΤΙΝΑΣ ΤΗΣ ΠΛΑΣΤΙΚΗΣ ΖΩΝΗΣ ΓΙΑ $k=1$

Για τον υπολογισμό της ακτίνας της πλαστικής ζώνης για υδροστατικό (ισότροπο) τασικό

πεδίο εφαρμόζουμε την εξίσωση ισορροπίας (Timoshenko and Goodier):

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (9)$$

και τις εξισώσεις του κυλίνδρου (10) και (11)

$$\sigma_r = p_o - (p_o - \sigma_{re}) \cdot \left(\frac{r_e}{r}\right)^2 \quad (10)$$

$$\sigma_\theta = p_o + (p_o - \sigma_{re}) \cdot \left(\frac{r_e}{r}\right)^2 \quad (11)$$

Στο όριο της πλαστικής ζώνης θα ισχύει η σχέση που προκύπτει από τις (10) και (11) με αφαίρεση κατά μέλη:

$$\sigma_{\theta e} - \sigma_{re} = 2 \cdot (p_o - \sigma_{re}) \quad (12)$$

Η εξίσωση (12) πρέπει να ικανοποιείται τόσο για την ελαστική ζώνη όσο και για την πλαστική στην επαφή τους. Επιπλέον, οι τάσεις στην πλαστική ζώνη πρέπει να ικανοποιούν την (6). Με την παραδοχή συνθηκών επίπεδης παραμόρφωσης ( $\epsilon_z = 0$ ) και την ισχύ του νόμου καθετότητας ( $d\epsilon_z = 0$ ) από την εφαρμογή του νόμου ροής (flow rule) (13):

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_2} = 0 \quad (13)$$

προκύπτει η σχέση:

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3 - (R_b - 1) \cdot \sigma_{tb}}{2} \quad (14)$$

Με αντικατάσταση των τάσεων

$$\sigma_1 = \sigma_r, \sigma_3 = \sigma_\theta \text{ και}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3 - (R_b - 1) \cdot \sigma_{tb}}{2}$$

στην διαφορική εξίσωση ισορροπίας (9) προκύπτει το μέτρο της ακτίνας της πλαστικής ζώνης (Αποστολέρης, 2003)

$$r_e = r_i \cdot e^{\frac{L-K}{2 \cdot (R-1) \cdot \sigma_i} - \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{K}{L}} \quad (15)$$

όπου:

$$K = -(R-1) \cdot \sigma_i - \sqrt{\frac{4}{3} \cdot R \cdot \sigma_i^2 - 4 \cdot (R-1) \cdot \sigma_i \cdot \sigma_{re} + \frac{4 \cdot (R-1)^2 \cdot \sigma_i^2}{3}} \quad (16)$$

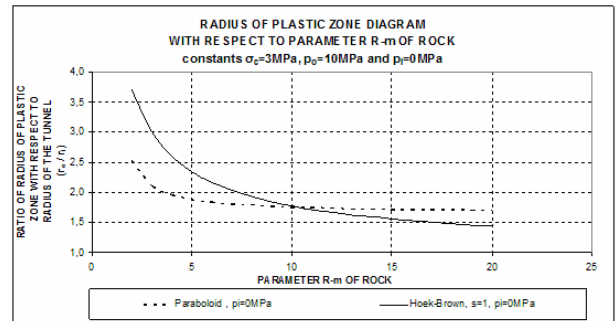
και

$$L = -(R-1) \cdot \sigma_i - \sqrt{\frac{4}{3} \cdot R \cdot \sigma_i^2 - 4 \cdot (R-1) \cdot \sigma_i \cdot p_i + \frac{4 \cdot (R-1)^2 \cdot \sigma_i^2}{3}} \quad (17)$$

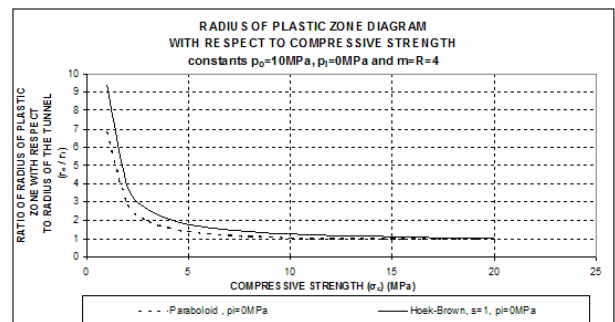
Προς σύγκριση με την ακτίνα της πλαστικής ζώνης την προβλεπόμενη με εφαρμογή του κριτηρίου Hoek-Brown παρατίθεται το μέτρο της (Hoek and Brown):

$$r_e = r_i \cdot e^{\frac{2}{m \cdot \sigma_c} \left( \sqrt{m \cdot \sigma_c \cdot \sigma_{re} + s \cdot \sigma_c^2} - \sqrt{m \cdot \sigma_c \cdot p_i + s \cdot \sigma_c^2} \right)} \quad (18)$$

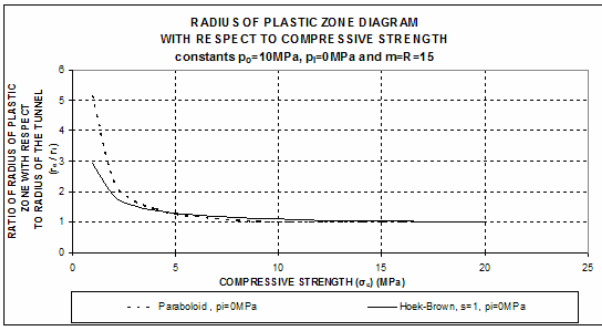
Στα “Σχήματα 5α, 5β και 5γ” που ακολουθούν γίνεται σύγκριση των ακτίνων κατά Hoek-Brown και κατά το προτεινόμενο κριτήριο του Παραβολοειδούς με παραμετρική ανάλυση.



(α)



(β)

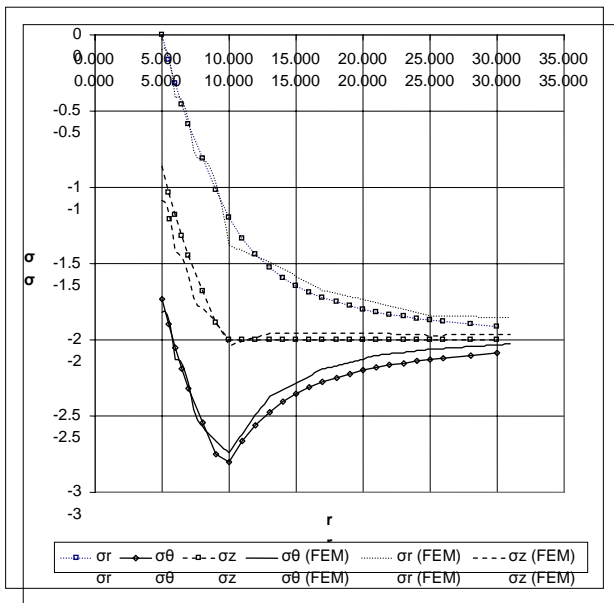


(γ)

Σχήμα 5: Ακτίνα της πλαστικής ζώνης συναρτήσει των παραμέτρων R-m (α), συναρτήσει της αντοχής σε θλίψη (R=4) (β) και (R=15) (γ).

Figure 5: Radius of plastic zone with respect to R-m (α), and with respect to compressive strength (R=4) (β) and (R=15) (γ).

Προς σύγκριση παρατίθενται επίσης οι επιλύσεις που πραγματοποιήθηκαν με το λογισμικό τρισδιάστατης μη-γραμμικής ανάλυσης με πεπερασμένα στοιχεία CEFÉAS (Κοζάνης, 2002) για σήραγγα με ακτίνα r=5m.

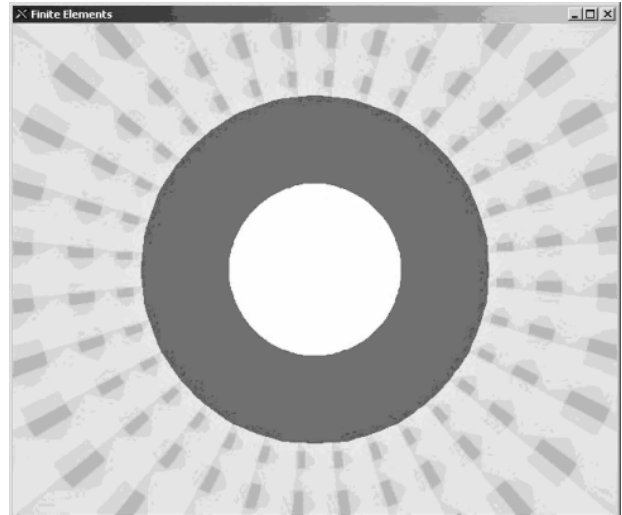


Σχήμα 6: Σύγκριση της μεταβολής των τάσεων μεταξύ αναλυτικής λύσης και του λογισμικού CEFÉAS

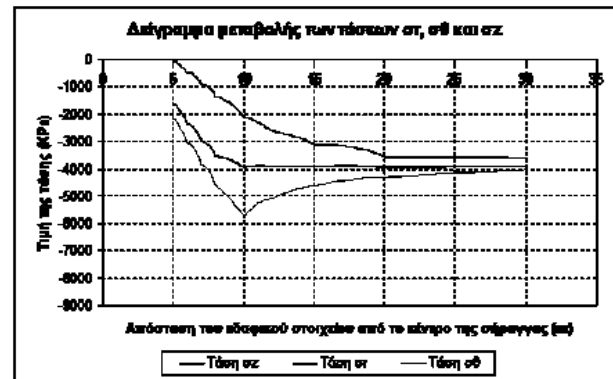
Figure 6: Comparison of stress variation according the closed form solution and the FEM program CEFÉAS

Στα “Σχήματα 7α-7στ” παρουσιάζονται επιλύσεις με το λογισμικό CEFÉAS, όπου φαίνεται ο σχηματισμός πλαστικής ζώνης και η αντίστοιχη μεταβολή τάσεων συναρτήσει της απόστασης από την οπή.

Στο πρόγραμμα CEFÉAS εισήχθησαν οι τιμές για την αντοχή της βραχομάζας :  $\sigma_c=1\text{MPa}$  και  $\sigma_t=0,125\text{MPa}$ . Για τις τιμές αυτές και για βάθος σήραγγας περίπου 160m ( $\rho_0=4\text{MPa}$ ) λήφθηκαν τα αποτελέσματα που φαίνονται στα “Σχήματα 7α και 7β”.

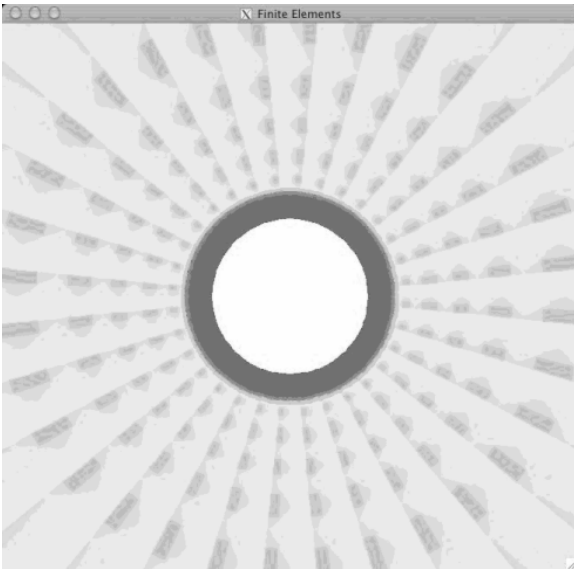


7 (α)



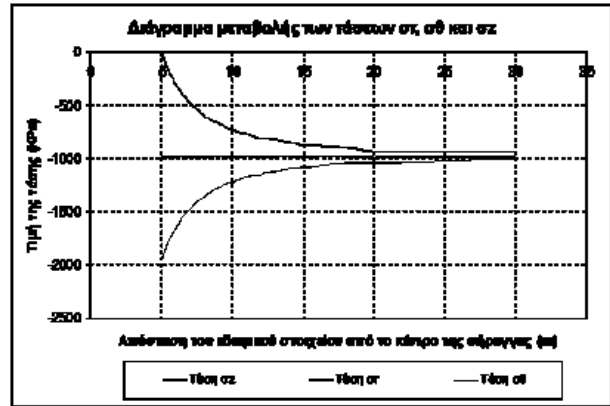
7 (β)

Αντίστοιχα, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα και για βάθη σήραγγας ίσα προς 80m ( $\rho_0=2\text{MPa}$ ) “Σχήματα 7γ και 7δ” και 40m ( $\rho_0=1\text{MPa}$ ) “Σχήματα 7ε και 7στ”.

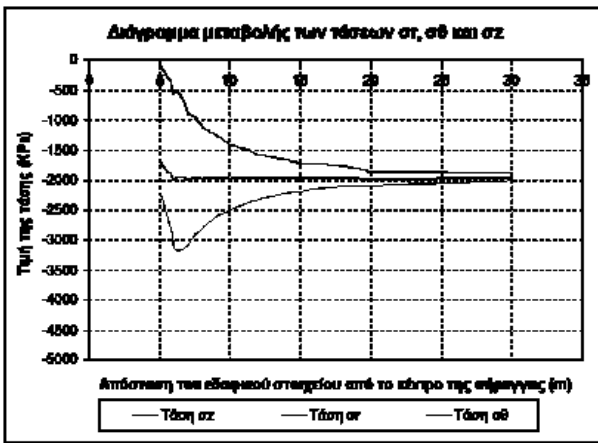


7 (γ)

τασικού πεδίου ( $k \neq 1$ ) παρατίθεται στο “Σχήμα 8” (Κοζάνης, 2002) η πλαστική ζώνη ανισότροπου μέσου όπως προέκυψε από το πρόγραμμα CEFEEAS.



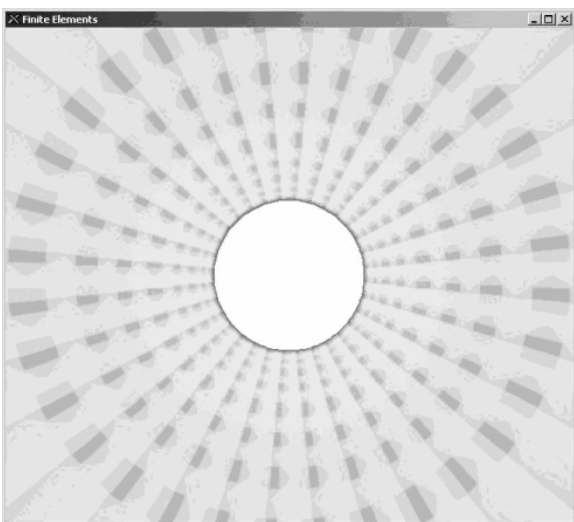
7 (στ)



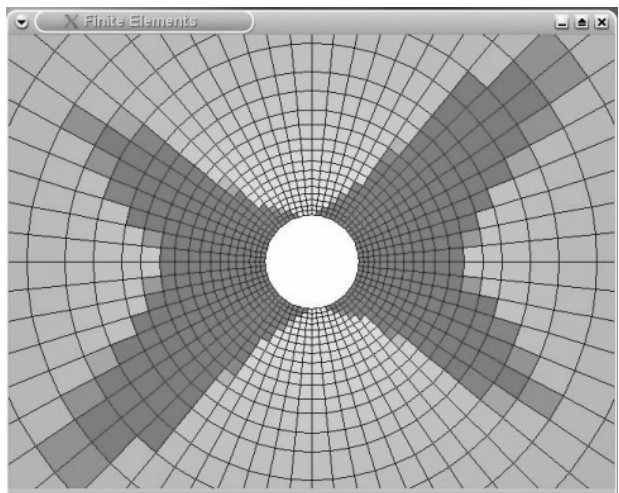
7 (δ)

Σχήμα 7: Πλαστική ζώνη και μεταβολή τάσεων γύρω από κυκλική οπή σύμφωνα με το κριτήριο του Παραβολοειδούς για  $\sigma_c=1\text{MPa}$ ,  $\sigma_t=0,125\text{MPa}$ . (α-β)  $\rho_0=4\text{MPa}$ , (γ-δ)  $\rho_0=2\text{MPa}$ , (ε-στ)  $\rho_0=1\text{MPa}$ .

Figure 7: Plastic zone and stress variation around cyclic opening according to the paraboloid criterion for  $\sigma_c=1\text{MPa}$ ,  $\sigma_t=0,125\text{MPa}$ . (α-β)  $\rho_0=4\text{MPa}$ , (γ-δ)  $\rho_0=2\text{MPa}$ , (ε-στ)  $\rho_0=1\text{MPa}$ .



7 (ε)



Σχήμα 8: Ζώνες αστοχίας για γωνία αξόνων ανισοτροπίας  $45^\circ$  ως προς την κατακόρυφο και  $k=0.5$  (Κοζάνης, 2002)

Figure 8: Failure zones for angle between of axes of anisotropy and the vertical direction equal to  $45^\circ$  and  $k=0.5$  (Kozanis, 2002)

Προς σύγκριση με την περίπτωση ανισότροπου μέσου και μη υδροστατικού

Για τα ίδια δεδομένα των αναλύσεων των “Σχημάτων 7α έως 7στ”, έγιναν υπολογισμοί με βάση τις σχέσεις (15) και (18) για να γίνει

σύγκριση μεταξύ του προτεινόμενου κριτηρίου του παραβολοειδούς και του κριτηρίου Hoek-Brown “Πίνακας 1”.

Παρατηρείται ότι σε όλες τις περιπτώσεις με το κριτήριο του παραβολοειδούς προβλέπεται ακτίνα πλαστικής ζώνης μικρότερη. Ενδεχομένως η διαφορά αυτή να οφείλεται σε μεγάλο βαθμό στο ότι στο κριτήριο αυτό συμμετέχει και η ενδιάμεση τάση  $\sigma_2$  σε αντίθεση με το κριτήριο Hoek-Brown το οποίο είναι συνάρτηση της  $\sigma_1$  και της  $\sigma_3$ .

Πίνακας 1: Σύγκριση αναλυτικών υπολογισμών με λύσεις κλειστής μορφής και ακτίνα οπής ίση προς 5m (Αποστολέρης, 2003)

Table 1: Comparison of analytical results by using closed form solutions for an opening with radius equal to 5m (Apostoleris, 2003)

Κριτήριο Παραβολοειδούς,  $p_0=4\text{MPa}$

$\sigma_c$ (MPa)	$\sigma_t$ (MPa)	R	$\sigma_{re}$ (MPa)	$r_e$ (m)
-1	0,125	8,00	-2,10	10,25

Κριτήριο Hoek-Brown,  $p_0=4\text{MPa}$

$\sigma_c$ (MPa)	m	s	$\sigma_{re}$ (MPa)	$r_e$ (m)
1	8	1	1,96	13,45

Κριτήριο Παραβολοειδούς  $p_0=2\text{MPa}$

$\sigma_c$ (MPa)	$\sigma_t$ (MPa)	R	$\sigma_{re}$ (MPa)	$r_e$ (m)
-1	0,125	8,00	-0,64	6,55

Κριτήριο Hoek-Brown,  $p_0=2\text{MPa}$

$\sigma_c$ (MPa)	m	s	$\sigma_{re}$ (MPa)	$r_e$ (m)
1	8	1	0,71	9,07

Κριτήριο Παραβολοειδούς,  $p_0=1\text{MPa}$

$\sigma_c$ (MPa)	$\sigma_t$ (MPa)	R	$\sigma_{re}$ (MPa)	$r_e$ (m)
-1	0,125	8,00	-0,01	5,02

Κριτήριο Hoek-Brown,  $p_0=1\text{MPa}$

$\sigma_c$ (MPa)	m	s	$\sigma_{re}$ (MPa)	$r_e$ (m)
1	8	1	0,20	6,84

## 5. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα εργασία εφαρμόστηκε το κριτήριο του Παραβολοειδούς για τον υπολογισμό της πλαστικής ακτίνας γύρω από κυκλική οπή εντός υδροστατικού (ισότροπου)

τασικού πεδίου. Η σύγκριση με τα αντίστοιχα αποτελέσματα που προκύπτουν με εφαρμογή του εμπειρικού κριτηρίου Hoek-Brown είναι ικανοποιητική. Το αποτέλεσμα αυτό είναι σημαντικό διότι το κριτήριο του παραβολοειδούς είναι ένα κριτήριο αυστηρά θεμελιωμένο και όχι εμπειρικό. Μπορεί δε να χρησιμεύσει ως μέτρο σύγκρισης σε διάφορες εφαρμογές της βραχομηχανικής. Το σημαντικότερο όμως πλεονέκτημά του είναι το ότι γενικεύεται ώστε να ερμηνεύει και την μη-γραμμική συμπεριφορά ανισότροπων υλικών. Αξίζει να σημειωθεί ότι έως σήμερα δεν έχει προταθεί άλλο κριτήριο το οποίο να μπορεί να ερμηνεύσει την μη-γραμμική συμπεριφορά ισότροπων και ανισότροπων μέσων.

## 6. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Αποστολέρης, Κ (2003): «Διερεύνηση της δημιουργίας πλαστικής ζώνης γύρω από κυκλική σήραγγα εντός υδροστατικού τασικού πεδίου με εφαρμογή του κριτηρίου του παραβολοειδούς», Διπλωματική εργασία, ΔΠΜΣ «Σχεδιασμός και Κατασκευή Υπόγειων Έργων», Ε.Μ.Π.
- Jaeger and Cook (1979), “Fundamentals of Rock Mechanics”, Chapman & Hall.
- Κοζάνης, Στ. (2001): «Η επιρροή της Ανισοτροπίας της Βραχομάζας στον Σχεδιασμό Υπόγειων Έργων», Διπλωματική εργασία, ΔΠΜΣ «Σχεδιασμός και Κατασκευή Υπόγειων Έργων», Ε.Μ.Π.
- Κοζάνης, Στ. (2002): «Συμβολή στη μελέτη της Βραχομάζας, θεωρουμένης ως μέσου με μη-γραμμική συμπεριφορά με τη μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων. Έμφαση στα Υπόγεια Έργα», Διδακτορική Διατριβή, ΕΜΠ.
- Hoek, E. and Brown, E. T., (1980): 'Underground Excavations in Rock', Institution of Mining and Metallurgy.
- Savin, G. N. (1961): “Stress Concentration around Holes”, Pergamon Press.
- Theocaris, P.S. (1983), “Yield criteria depending on pressure and dilatancy”, Proceedings National Academy of Athens, Vol. 58, pp. 641-669.
- Theocaris, P.S. and Philippidis Th., (1987), “The paraboloidal failure surface of initially anisotropic elastic solids”, I. Rein. Plas. Composites, Vol. 6, Issue 3.
- Theocaris, P.S. (1989), “The paraboloid failure surface for the general orthotropic material”, Acta Mechanica, Vol. 79, pp. 53-79.
- Timoshenko, S. P. and Goodier, J. N. (1951): “Theory of Elasticity”, McGraw-Hill.



