

# Ένα ανισότροπο ελαστοπλαστικό καταστατικό προσομοίωμα για δομημένα εδάφη

## An anisotropic elastoplastic constitutive model for structured soils

ΜΠΕΛΟΚΑΣ, Γ.  
ΚΑΒΒΑΔΑΣ, Μ.

Δρ Πολιτικός Μηχανικός  
Δρ. Πολιτικός Μηχανικός, Αναπλ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

**ΠΕΡΙΛΗΨΗ :** Το άρθρο παρουσιάζει τις αρχές και τη μαθηματική διατύπωση του προσφάτως αναπτυγμένου ελαστοπλαστικού καταστατικού Προσομοιώματος για Δομημένα Εδάφη (MSS-2), με δύο περιβάλλουσες διαρροής. Η διατύπωσή του στηρίζεται στον διαχωρισμό της κατάστασης του υλικού σε μη-δομημένες και δομημένες. Το προσομοίωμα μπορεί να περιγράψει σημαντικά μηχανικά χαρακτηριστικά των δομημένων εδαφών όπως: α) αρχική ανισοτροπία λόγω δομής (ιστορία φόρτισης και δέση), β) εξελισσόμενη ανισοτροπία λόγω ιστορίας φόρτισης, γ) αυξημένη στιβαρότητα και αντοχή λόγω δομής, δ) απομείωση της κανονικοποιημένης στιβαρότητας και της αντοχής λόγω απώλειας δομής, ε) ανελαστική συμπεριφορά σε μικρές παραμορφώσεις.

**ABSTRACT :** The paper presents the principles and the basic mathematical formulation of the recently developed elastoplastic constitutive Model for Structured Soils (MSS-2), with two yield surfaces. Its formulation is based on the distinction between structureless and structured states. The model is able to describe important engineering characteristics of structured soils such as: a) initial anisotropy due to structure (stress history and bonding), b) evolving anisotropy due to stress history, c) increased stiffness and strength due to structure, d) reduction of normalized stiffness and strength due to structure loss, e) small strain inelastic behaviour.

### 1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα περισσότερα εδαφικά υλικά στο φυσικό τους περιβάλλον είναι δομημένα (structured) ως αποτέλεσμα των διαφόρων φυσικών και τεχνητών διεργασιών στις οποίες υποβάλλονται σε όλη τους τη γεωλογική ιστορία. Οι δύο βασικοί παράγοντες ανάπτυξης δομής είναι η ιστορία φόρτισης (stress history, π.χ. προφόρτιση, συμπύκνωση) και η δέση (bonding, π.χ. τσιμέντωση, γήρανση, θιξοτροπία).

Η επίδραση των παραγόντων αυτών είναι κυρίαρχη στις μηχανικές ιδιότητες ενός φυσικού εδάφους επηρεάζοντας τη στιβαρότητα, διαστολικότητα και την αντοχή, καθώς και τα ανισοτροπικά τους χαρακτηριστικά. Ειδικότερα, η δέση οδηγεί σε συνιστώσες στιβαρότητας, διαστολικότητας, αντοχής και ανισοτροπίας, οι οποίες δεν

μπορούν να περιγραφούν αποκλειστικά από την ιστορία φόρτισης του υλικού. Συνεπώς, τα σύγχρονα καταστατικά προσομοιώματα πρέπει να περιγράφουν την επίδραση των παραγόντων ανάπτυξης δομής στα μηχανικά χαρακτηριστικά του εδάφους.

Στο παρόν άρθρο παρουσιάζεται το πρόσφατα αναπτυγμένο Προσομοίωμα Εδαφών με Δομή (Model for Structured Soils, MSS-2), το οποίο είναι ελαστοπλαστικό με οριακή περιβάλλουσα (bounding surface). Το MSS-2 μπορεί να προσομοιώσει μέσα από ένα ενιαίο μαθηματικό πλαίσιο τα παραπάνω μηχανικά χαρακτηριστικά, προάγοντας έτσι την τρέχουσα πρακτική ελαστοπλαστικής καταστατικής προσομοίωσης εδαφών. Σημείο εκκίνησης αποτέλεσαν τα προσομοιώματα των Kavvas & Belokas (2001) και Kavvas & Amorosi (2000).

Το MSS-2 καταστρώθηκε έτσι ώστε τα διάφορα χαρακτηριστικά του να μπορούν να ενεργοποιούνται ανεξάρτητα και επιλεκτικά, ανάλογα με τη φύση του υλικού και τα διαθέσιμα στοιχεία. Επιπλέον η ταυστική μαθηματική διατύπωση του προσομοιώματος επιτρέπει την ευθεία εισαγωγή του σε κώδικες πεπερασμένων στοιχείων για τριδιάστατες αναλύσεις (π.χ. Μπελόκας & Καββαδάς, 2010α και Μπελόκας, 2008).

Η ταυστική διατύπωση περιλαμβάνει τον ταυστικό των τάσεων  $\sigma = s + sI$  ( $s$ : διεκτροπική τάση,  $\sigma$ : μέση ορθή τάση) και τον ταυστικό των παραμορφώσεων  $\varepsilon = e + eI$  ( $e$ : διεκτροπική παραμόρφωση,  $\varepsilon$ : ογκομετρική παραμόρφωση), όπου  $I$  ο μοναδιαίος ταυστικός. Όλες οι τάσεις είναι ενεργές. Οι τελείες πάνω από ένα σύμβολο δηλώνουν επαυξητικές (incremental) ποσότητες.

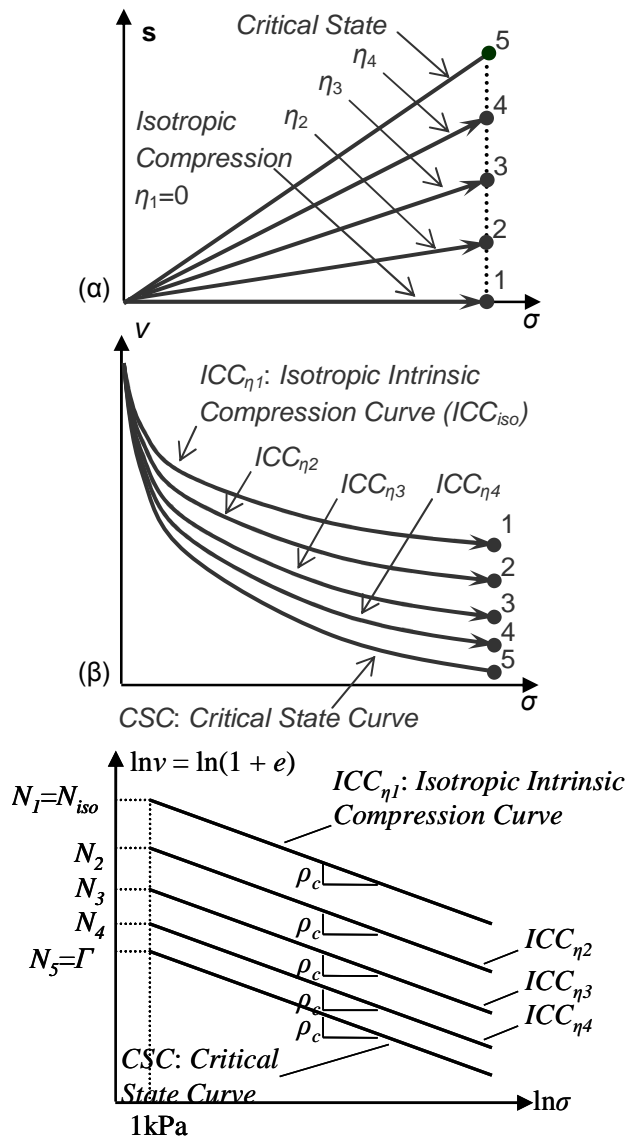
## 2. ΜΗ ΔΟΜΗΜΕΝΕΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΙΣ

Σύμφωνα με τους Leroueil & Vaughan (1990), ένα εδαφικό υλικό βρίσκεται σε μή-δομημένη κατάσταση όταν η μηχανική του συμπεριφορά εξαρτάται μόνο από την τρέχουσα κατάσταση, η οποία ορίζεται από την ενεργό τάση ( $\sigma$ ,  $s$ ) και τον ειδικό όγκο ( $v=1+e$ ).

Οι Belokas & Kavvadas (2010) και ο Μπελόκας (2008) έχουν διατυπώσει ένα μαθηματικό πλαίσιο, το Πλαίσιο Εγγενούς Συμπιεστότητας (Intrinsic Compressibility Framework) για την περιγραφή των μή-δομημένων καταστάσεων των εδαφικών υλικών. Η περιγραφή αυτή βασίστηκε στη διατύπωση των Leroueil & Vaughan (1990) και στις παρατηρήσεις από τις εργαστηριακές δοκιμές των Roscoe et al (1963), Lewin & Burland (1970), Gens (1980), Μπελόκας & Καββαδάς (2010β) κ.α. Έτσι, μή-δομημένες είναι οι καταστάσεις μετά από πλήρη αναμόχλευση και επακόλουθη ακτινική τασική όδευση, δηλ. όδευση υπό σταθερό λόγο τάσης  $\eta_\sigma = (s:s)^{0.5}/\sigma$ . Μάλιστα, κάθε λόγος τάσης αντιστοιχεί σε ξεχωριστή Καμπύλη Εγγενούς Συμπίεσης (Intrinsic Compression Curve –  $ICC_\eta$ ), όπως φαίνεται στο Σχήμα 1α,β. Η εξίσωση που περιγράφει τις  $ICC_\eta$  καμπύλες είναι ανεξάρτητη από αυτήν την παρατήρηση (βλ. Μπελόκας, 2008).

Οι  $ICC_\eta$  καμπύλες προσομοιώνονται, στο σύνηθες εύρος τάσεων, με την εξίσωση 1 (δηλ. είναι γραμμικές στο επίπεδο  $\ln v - \ln \sigma$ , βλ. Σχήμα 1γ), όπου  $\rho_c$  σταθερά και  $N_\eta$  παράμετρος που περιγράφει τη θέση της  $ICC_\eta$  στο επίπεδο  $\ln v - \ln \sigma$ .

$$\ln v = \ln N_\eta - \rho_c \ln \sigma \quad (1)$$



Σχήμα 1. Μή-δομημένες καταστάσεις και Πλαίσιο Εγγενούς Συμπιεστότητας (Belokas & Kavvadas, 2010).

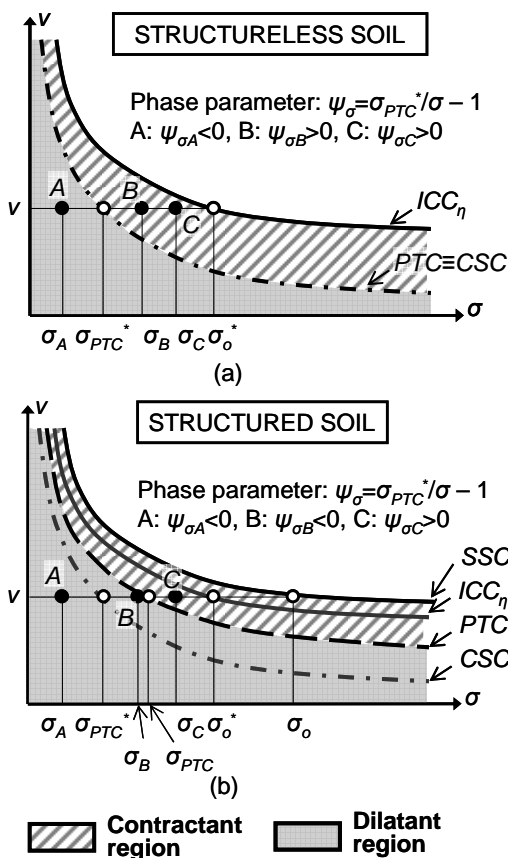
Figure 1. Structureless states and Intrinsic Compressibility Framework (Belokas & Kavvadas, 2010).

Η εξίσωση 2 συσχετίζει την κλίση της τασικής όδευσης με τη θέση της  $ICC_\eta$  στο επίπεδο  $v - \sigma$ , και είναι όμοια με αυτή των Belokas & Kavvadas (2010a). Μαζί με την εξίσωση 1, περιγράφει όλες τις δυνατές μή-δομημένες καταστάσεις ενός υλικού. Το κάτω όριο όλων των πιθανών  $ICC_\eta$  είναι η καμπύλη κρίσιμης κατάστασης (CSC), ενώ το άνω όριο είναι η Ισότροπη Εγγενής Καμπύλη Συμπίεσης.

$$\ln N_\eta = \ln \Gamma + (\ln N_{iso} - \ln \Gamma) [1 - \eta_\sigma / M]^\eta \quad (2)$$

### 3. ΔΟΜΗ ΚΑΙ ΔΙΑΣΤΟΛΙΚΟΤΗΤΑ

Οι  $ICC_{\eta}$  καμπύλες ορίζουν όλες τις δυνατές μη δομημένες καταστάσεις υπό συνθήκες ακτινικής τασικής όδευσης. Στην εδαφομηχανική κρίσιμης κατάστασης, η καμπύλη κρίσιμης κατάστασης (*Critical State Curve – CSC*) εξυπηρετεί τον σκοπό της Καμπύλης Αλλαγής Φάσης (*Phase Transition curve – PTC*). Αριστερά της *PTC* η συμπεριφορά είναι διαστολική, ενώ δεξιά της *PTC* η συμπεριφορά είναι συστολική (Σχήμα 2α). Στα δομημένα υλικά η *PTC* μετακινείται προς τα δεξιά, με αποτέλεσμα να διευρύνεται η διαστολική περιοχή (Σχήμα 2β). Όσο αυξάνεται η δομή τόσο πιο δεξιά κινείται η *PTC* και αυξάνεται η διαστολικότητα του υλικού.



Σχήμα 2. Επίδραση της δομής στην πλαστική διαστολικότητα.

Figure 2. Influence of structure in plastic dilatancy.

Η διάκριση μεταξύ διαστολικής και συστολικής συμπεριφοράς ελέγχεται από την παράμετρο φάσης,  $\psi_{\sigma}$ , η οποία ορίζεται από την εξίσωση 3 και είναι παρόμοια με την παράμετρο κατάστασης των Been & Jefferies (1985). Όταν η τρέχουσα κατάσταση βρίσκεται:

α) αριστερά της *PTC* είναι  $\psi_{\sigma} < 0$  και η συμπεριφορά είναι διαστολική), β) επί της *PTC* είναι  $\psi_{\sigma} = 0$ , όπως για παράδειγμα στην κρίσιμη κατάσταση (e.g. critical state) και γ) δεξιά της *PTC* είναι  $\psi_{\sigma} > 0$  και συμπεριφορά είναι συστολική.

$$\psi_{\sigma} = \sigma_{PTC} / \sigma - 1 \quad (3)$$

όπου  $\sigma_{PTC}$  δίνεται από την εξίσωση 4 εάν η  $ICC_{\eta}$  περιγράφεται από την εξίσωση 1.

$$\sigma_{PTC} = \exp \left[ \frac{\lambda \ln \sigma_o - (N_{\eta} - \Gamma)}{\lambda} \right] \quad (4)$$

όπου  $\sigma_o \geq \sigma_o^*$  (βλ. Σχήμα 2) είναι ένα μέτρο της διαθέσιμης δομής και ορίζει την Καμπύλη Αντοχής Δομής (*Structure Strength Curve – SSC*) στο επίπεδο  $v - \sigma$  (Μπελόκας, 2008).

Όσο η φόρτιση εξελίσσεται, η διαθέσιμη δομή μειώνεται και η *PTC* κινείται προς την *CSC*, ενώ η  $\sigma_o$  τείνει να λάβει τη τιμή  $\sigma_o^*$ .

Τέλος, στις μή-δομημένες καταστάσεις η διαστολικότητα είναι συνάρτηση του λόγου τάσης (βλ. Μπελόκας & Καββαδάς, 2010β).

### 4. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΜΑΤΟΣ

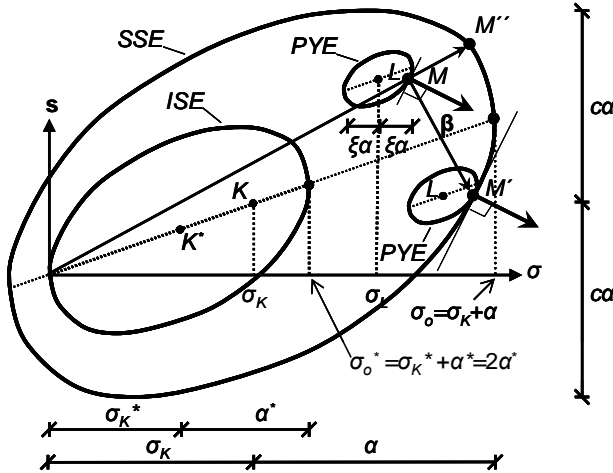
Το MSS-2 προσομοίωμα εφαρμόζει επαυξητική ελαστοπλαστικότητα οριακής περιβάλλουσας, ανεξάρτητη του ρυθμού παραμόρφωσης. Η διατύπωση του προσομοιώματος περιλαμβάνει τα στοιχεία μηχανικής συμπεριφοράς που περιγράφηκαν στις παραγράφους 2 και 3. Επίσης, το MSS-2 περιγράφει την εξέλιξη της ανισοτροπίας και την απομείωση της δομής και την επίδρασή τους στην στιβαρότητα, διαστολικότητα και αντοχή.

Η πλήρης μαθηματική διατύπωση του προσομοιώματος αυτού έχει παρουσιαστεί από τον Μπελόκα (2008) και τους Belokas & Kanvadas (2010b).

#### 4.1 Χαρακτηριστικές Περιβάλλουσες

Το MSS-2 προσομοίωμα περιλαμβάνει τρεις χαρακτηριστικές περιβάλλουσες (Σχήμα 3): α) την Περιβάλλουσα Αντοχής Δομής (*Structure Strength Envelope – SSE*), β) την Περιβάλλουσα Πλαστικής Διαρροής (*Plastic Yield Envelope – PYE*) and γ) την Εγγενή Περιβάλλουσα Αντοχής (*Intrinsic Strength Envelope – ISE*). Η *SSE* ορίζει το σύνολο όλων των δυνατών καταστάσεων ενός υλικού

(οριακή περιβάλλουσα – bounding surface), η *PYE* περιβάλλει όλες τις ελαστικές καταστάσεις (είναι η περιβάλλουσα διαρροής), ενώ η *ISE* είναι μια περιβάλλουσα αναφοράς (αντιστοιχεί σε μια ισοδύναμη μη δομημένη κατάσταση). Οι περιβάλλουσες αυτές έχουν διατυπωθεί στον πλήρη ταυστή των τάσεων.



Σχήμα 3. Οι χαρακτηριστικές περιβάλλουσες του MSS-2 προσομοιώματος.  
Figure 3. The characteristic surfaces of the MSS-2 model.

Η συμπεριφορά εντός της *PYE* είναι υπερελαστική. Οι καταστάσεις επί της *PYE* είναι πλαστικές και αντιστοιχούν σε περιορισμένη απομείωση ή/και μεταβολή της δομής. Για φορτίσεις που κατευθύνονται εκτός της *PYE* (πλαστικές εντάσεις), η *PYE* συμπαρασύρεται από την τρέχουσα τασική κατάσταση (κινηματική κράτυνση) μέχρι να έρθει σε επαφή με την *SSE* (διαρροή δομής, βλ. Kanvadas, 1998). Σε αυτήν την κατάσταση αρχίζει η μαζική απομείωση της δομής και μεταβολή ανισοτροπίας της δομής.

Η *ISE* αντιπροσωπεύει ένα κάτω όριο της *SSE* για την κατάσταση στην οποία όλοι οι παράγοντες δομής έχουν εξαλειφθεί (κυρίως μετά από μεγάλη παραμόρφωση). Συνεπώς, στις μη δομημένες καταστάσεις οι *SSE* και *ISE* ταυτίζονται και το MSS-2 προσομοίωμα μεταπίπτει σε ένα δύο περιβαλλουσών τύπου Cam-Clay προσομοίωμα.

Η γεωμετρική αναπαράσταση της *SSE* στο χώρο των τάσεων  $\sigma \equiv (\sigma, \mathbf{s})$  είναι ένα στριμμένο – στρεβλό ελλειψοειδές (Kanvadas 1983) και αποτελεί την οριακή περιβάλλουσα:

$$F(\sigma; \sigma_K, \alpha) \equiv \frac{1}{c^2} (\mathbf{s} - \frac{\sigma}{\sigma_K} \mathbf{s}_K) : (\mathbf{s} - \frac{\sigma}{\sigma_K} \mathbf{s}_K) + (\sigma - \sigma_K)^2 - \alpha^2 = 0 \quad (5)$$

Ο ταυστής  $\sigma_K = \sigma_K \mathbf{I} + \mathbf{s}_K$  περιγράφει το κέντρο *K* της *SSE* και οι ημιάξονες του ελλειψοειδούς έχουν μήκος ίσο με ( $\alpha$ ) κατά μήκος του ισότροπου άξονα και με ( $c\alpha$ ) κατά μήκος των διεκτροπικών αξόνων. Αυτή η μαθηματική διατύπωση μπορεί να εφαρμόσει διαφορετικές τιμές της παραμέτρου *c*, έτσι ώστε να προσομοιώσει εξάρτηση της αντοχής από την τρίτη αναλλοίωτη. Το μέγεθος  $\alpha$  είναι συνάρτηση του μεγέθους της δομής, ενώ το διάνυσμα διεύθυνσης ( $\mathbf{b}_K \equiv \mathbf{s}_K / \sigma_K$ ) του κέντρου της *SSE* αποτελεί μέτρο της ανισοτροπίας της δομής.

Η *SSE* μεταπίπτει σε στην περιβάλλουσα του Modified Cam-Clay προσομοιώματος όταν το *K* κείται επί του ισότροπου άξονα ( $\sigma_K = \alpha \mathbf{I}$ ), π.χ. κατά μήκος μιας ισότροπης στερεοποίησης.

Η *PYE* έχει, για μαθηματική απλοποίηση, όμοιο σχήμα και άξονες παράλληλους με την *SSE* και ένα λόγο ομοιότητας ίσο με  $\xi$  ( $\xi < 1$ ):

$$f(\sigma; \sigma_K, \sigma_L, \alpha) \equiv \frac{1}{c^2} (\mathbf{s} - \frac{\sigma - \sigma_L}{\sigma_K} \mathbf{s}_K - \mathbf{s}_L) : (\mathbf{s} - \frac{\sigma - \sigma_L}{\sigma_K} \mathbf{s}_K - \mathbf{s}_L) + (\sigma - \sigma_L)^2 - (\xi \alpha)^2 = 0 \quad (6)$$

Ο ταυστής  $\sigma_L = \sigma_L \mathbf{I} + \mathbf{s}_L$  αποτελεί το κέντρο *L* της *PYE*. Επειδή τα περισσότερα εδάφη συμπεριφέρονται ελαστικά σε ένα πολύ μικρό εύρος παραμόρφωσης (της τάξης του  $\approx 0.001\% \div 0.2\%$ ), το προσομοίωμα συνήθως εφαρμόζει μια πολύ μικρή *PYE* ( $\xi \approx 0.001$ ) το οποίο προσφέρει ρεαλιστική προσομοίωση της ανακυκλικής φόρτισης.

Η *ISE* αντιστοιχεί σε μια ισοδύναμη μη δομημένη κατάσταση, η οποία έχει τον ίδιο ειδικό όγκο (*v*) και λόγο τάσης στερεοποίησης ( $\eta_\sigma$ ) με το φυσικό υλικό. Η περιβάλλουσα αυτή είναι επίσης ένα στριμμένο – στρεβλό ελλειψοειδές με κέντρο το σημείο *K\**, του οποίου οι συντεταγμένες είναι  $\sigma_K^* = \sigma_K^* \mathbf{I} + \mathbf{s}_K^*$ :

$$F^*(\sigma; \sigma_K^*, \alpha^*) \equiv \frac{1}{c^2} (\mathbf{s} - \frac{\sigma}{\sigma_K^*} \mathbf{s}_K^*) : (\mathbf{s} - \frac{\sigma}{\sigma_K^*} \mathbf{s}_K^*) + (\sigma - \sigma_K^*)^2 - (\alpha^*)^2 = 0 \quad (7)$$

Ο μεγάλος άξονας της *ISE*, ο οποίος έχει τη διεύθυνση του διανύσματος  $\mathbf{b}_K^* \equiv \mathbf{s}_K^* / \sigma_K^*$ , περιγράφει την εγγενή ανισοτροπία (ελέγχεται από το λόγο τάσης στερεοποίησης  $\eta_\sigma$ ). Οι *ISE* και *SSE* μπορούν να έχουν διαφορετικό

προσανατολισμό (όπου  $\mathbf{b}_k^* \neq \mathbf{b}_k$ ) όταν η ανισοτροπία λόγω δομής δεν συμπίπτει με την εγγενή ανισοτροπία. Το μέγεθος ( $\alpha^*$ ) της *ISE* ελέγχεται από μία Cam-Clay τύπου ισότροπη κράτυνση και αποτελεί συνάρτηση του τρέχοντα ειδικού όγκου ( $v$ ), της εγγενούς συμπίεστικότητας ( $\rho_c$ ) και του λόγου στερεοποίησης ( $\eta_\sigma$ ), ο οποίος εκφράζεται μέσω της παραμέτρου  $N_\eta$  (εξίσωση 2 και Σχήμα 1):

$$\alpha^* = \sigma_o^*/2 = \frac{1}{2} \exp\left(\frac{\ln v - \ln N_\eta}{\rho_c}\right) \quad (8)$$

Η διαφορά στο μέγεθος μεταξύ των *SSE* και *ISE* ( $\alpha - \alpha^*$ ) είναι ένα ευθύ μέτρο του μεγέθους της δομής.

#### 4.2 Χαρακτηριστικές Περιβάλλουσες

Οι νόμοι ισότροπης και κινηματικής κράτυνσης ελέγχουν τη μεταβολή των χαρακτηριστικών περιβαλλουσών κατά τις πλαστικές εντάσεις. Σε μια πλαστική ένταση η τρέχουσα τασική κατάσταση ( $\sigma$ ) βρίσκεται πάντοτε επί της *PYE*.

##### 4.2.1 Ισότροπη Κράτυνση

Το προσομοίωμα *MSS-2* εφαρμόζει μια ισότροπα κρατυνόμενη απομείωση της δομής, η οποία κατά την πλήρη απώλεια δομής (δηλ. *SSE*  $\equiv$  *ISE*) μεταπίπτει σε μια Cam - Clay τύπου ισότροπη κράτυνση:

$$\dot{\alpha} = \alpha^* \left( \frac{1}{\rho_c - \rho_s} \right) \dot{\epsilon}_v^p - (\alpha - \alpha^*) (A_v \dot{\epsilon}_v^p + A_q \dot{\epsilon}_q^p) \quad (9)$$

$$A_v = \zeta_v \cdot \exp(-\eta_v \cdot \epsilon_v^p) \quad (10a)$$

$$A_q = \theta_q + \zeta_q \cdot \exp(-\eta_q \cdot \epsilon_q^p) \quad (10b)$$

$$\dot{\epsilon}_v^p \equiv \dot{\epsilon}_v^p : \mathbf{I} = \dot{\epsilon}_{11}^p + \dot{\epsilon}_{22}^p + \dot{\epsilon}_{33}^p \quad (11a)$$

$$\dot{\epsilon}_q^p \equiv \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot (\dot{\mathbf{e}}^p : \dot{\mathbf{e}}^p) \quad (11b)$$

όπου οι εξισώσεις 11a and 11b δίνουν αντίστοιχα την πλαστική ογκομετρική και διεκτροπική επαυξητική παραμόρφωση, τα ( $\epsilon_v^p$ ,  $\epsilon_q^p$ ) είναι οι αθροιστικές πλαστικές ογκομετρικές και διεκτροπικές παραμορφώσεις, ( $\rho_c$ ,  $\rho_s$ ) είναι οι σταθερές εγγενούς συμπίεστικότητας κατά την παρθένα συμπίεση και την αποφόρτιση, ( $\zeta_v$ ,  $\eta_v$ ) είναι

σταθερές ογκομετρικής απομείωσης δομής και ( $\theta_q$ ,  $\zeta_q$ ,  $\eta_q$ ) είναι σταθερές διεκτροπικής απομείωσης δομής. Η σταθερά  $\theta_q$  εφαρμόζεται για να αυξηθεί ο ρυθμός της απομείωσης της δέσης λόγω διάτμησης, επειδή η διατμητικά επιβαλλόμενη απομείωση της δομής συνήθως κυριαρχεί σε σχέση με την ογκομετρικά επιβαλλόμενη.

Στην εξίσωση 9 η συνιστώσα ( $\alpha - \alpha^*$ ) αντιπροσωπεύει το μέγεθος της δομής και η μεταβλητή  $\alpha^*$  δίνεται από την εξίσωση 8. Η εξίσωση 9 εξασφαλίζει πως η διαφορά  $\alpha - \alpha^*$  συνεχώς μειώνεται μέχρι την τιμή  $\alpha - \alpha^* = 0$ , όταν όλη η δομή έχει απολεσθεί. Επιπρόσθετα, με την κατάλληλη επιλογή των σταθερών απομείωσης της δομής μπορούν να προσομοιωθούν διάφοροι ρυθμοί μεταβολής της δομής μέχρι και συμπεριφορά τύπου κατάρρευσης.

##### 4.2.2 Κινηματική Κράτυνση

Οι νόμοι κινηματικής κράτυνσης περιγράφουν τη μεταβολή της ανισοτροπίας της δομής κατά την πλαστική παραμόρφωση, μέσω του ελέγχου της θέσης των κέντρων  $K$  και  $L$  των *SSE* και *PYE* περιβαλλουσών. Το *MSS-2* προσομοίωμα περιγράφει την ανισοτροπία μέσω του κύριου ( $\mathbf{b}_k \equiv \mathbf{s}_k / \sigma_k$ ) και δευτερεύοντα ( $\mathbf{b}_l \equiv \mathbf{s}_l / \sigma_l$ ) τανυστή ανισοτροπίας και εφαρμόζει τους νόμους κινηματικής κράτυνσης του αρχικού προσομοιώματος *MSS* (Kavvadas & Amorosi, 2000).

Τονίζεται πως η μαθηματική διατύπωση των νόμων κινηματικής κράτυνσης είναι ανεξάρτητη του σχήματος των *SSE* και *PYE* περιβαλλουσών όταν οι *SSE* και *PYE* έχουν όμοιο σχήμα. Αυτή είναι και η περίπτωση των προσομοιωμάτων *MSS* και *MSS-2*.

##### Κίνηση του κέντρου $K$ της *SSE*

Για πλαστικές εντάσεις εντός της *SSE*:

$$\dot{\sigma}_k = \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \sigma_k \quad (12a)$$

δηλ. το  $K$  κινείται κατά μήκος μιας ακτινικής τασικής όδευσης. Επειδή ο λόγος  $\mathbf{b}_k \equiv \mathbf{s}_k / \sigma_k$  παραμένει σταθερός, η κύρια ανισοτροπία δεν μεταβάλλεται.

Για πλαστικές εντάσεις επί της *SSE*:

$$\dot{\sigma}_k = \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \sigma_k + \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \psi \left( \mathbf{s} - \frac{\sigma}{\sigma_k} \mathbf{s}_k \right) \quad (12b)$$

όπου ο δεύτερος όρος της εξίσωσης αυτής προκαλεί απόκλιση του κέντρου  $K$  από την ακτινική όδευση κατά την πλαστική παραμόρφωση, αλλάζοντας τον τανυστή κύριας ανισοτροπίας ( $\mathbf{b}_K$ ). Η σταθερά  $\psi$  ελέγχει το ρυθμό με τον οποίο εξελίσσεται η απόκλιση.

#### Κίνηση του κέντρου $L$ της $PYE$

Για πλαστικές εντάσεις επί της  $SSE$ , οι περιβάλλουσες  $PYE$  και  $SSE$  παραμένουν σε επαφή (στο σημείο της τρέχουσας τασικής κατάστασης  $\sigma$ ) και η θέση του σημείου  $L$  ελέγχεται από τη θέση ( $\sigma_K$ ) του  $K$ :

$$\sigma_L = (1 - \xi)\sigma - \xi\sigma_K \quad (13a)$$

Για πλαστικές εντάσεις εντός της  $SSE$ , η κίνηση του σημείου  $L$  είναι τέτοια ώστε η τρέχουσα τασική κατάσταση (σημείο  $M$  επί της  $PYE$  στο Σχήμα 3) να οδεύει προς το συζυγές σημείο  $M'$  επί της  $SSE$  (τα διανύσματα κλίσης των  $PYE$  και  $SSE$  στα σημεία αυτά είναι παράλληλα). Η γεωμετρική ομοιότητα των  $PYE$  και  $SSE$  ορίζει το διάνυσμα διεύθυνσης  $\beta \equiv (\sigma - \sigma_L)/\xi - (\sigma - \sigma_L)$ . Συνεπώς, η μετακίνηση του κέντρου  $L$  δίνεται από την εξίσωση:

$$\dot{\sigma}_L = \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \sigma_L + \dot{\mu} \cdot \beta \quad (13b)$$

η οποία εξασφαλίζει πως οι χαρακτηριστικές περιβάλλουσες δεν τέμνονται ακόμα και σε πεπερασμένες επαυξησεις της κατάστασης του υλικού (βλ. Kanvadas & Amorosì, 2000). Ο συντελεστής  $\dot{\mu}$  ορίζεται από τη «συνθήκη συμβατότητας», δηλ. την απαίτηση πως κατά την πλαστική παραμόρφωση η τασική κατάσταση παραμένει επί της  $PYE$  ( $\dot{f} = 0$ ).

#### 4.2.3 Νόμος Ροής

Η επαυξητική πλαστική παραμόρφωση προσδιορίζεται μέσω ενός μη-συσχετισμένου επαυξητικά γραμμικού νόμου πλαστικής ροής:

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\lambda}_f \cdot \mathbf{P}_f \text{ and } \dot{\lambda}_f = \frac{1}{H_f} \cdot (\mathbf{Q}_f : \dot{\sigma}) \quad (14)$$

όπου το βαθμωτό ( $\dot{\lambda}_f$ ) και ο τανυστής πλαστικού δυναμικού ( $\mathbf{P}_f$ ) δίνουν το μέγεθος και τη διεύθυνση της επαυξητικής πλαστικής παραμόρφωσης, ( $\dot{\sigma}$ ) είναι η αντίστοιχη επαύξηση της ενεργού τάσης, ( $H_f$ ) είναι ένα «πλαστικό μέτρο κράτησης» (περιγράφεται σε

επόμενη παράγραφο) και  $\mathbf{Q}_f \equiv \partial f / \partial \sigma$  είναι η κλίση της  $PYE$ .

Το πλαστικό δυναμικό ( $\mathbf{P}_f$ ) έχει τις ακόλουθες συνιστώσες, ισότροπη και διεκτροπική αντίστοιχα:

$$\mathbf{P}_f \equiv -\lambda_1 \psi_\sigma \left[ \frac{h(\sigma)}{\sigma_o^2} \right] \sigma \quad (15a)$$

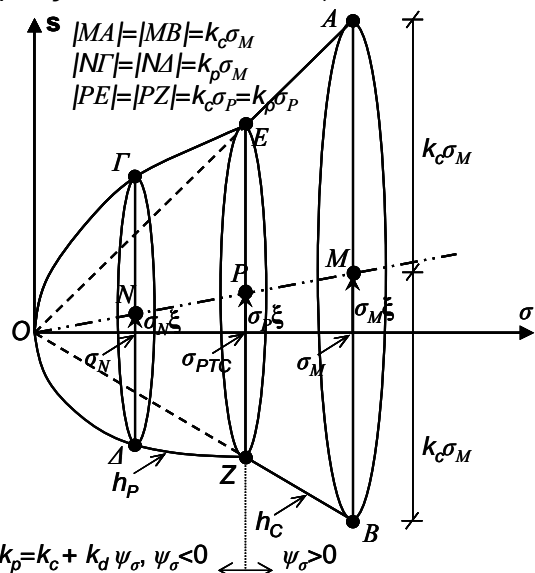
$$\mathbf{P}'_f \equiv (\mathbf{s} - \lambda_2 \frac{\sigma}{\sigma_K} \mathbf{s}_K) \quad (15b)$$

όπου  $\lambda_1$  μια θετική σταθερά,  $h(\sigma)$  μια κωνοειδής περιβάλλουσα αστοχίας (failure envelope -  $FE$ ) που δίνεται από την εξίσωση 16 και φαίνεται στο Σχήμα 4 και  $\lambda_2$  μια θετική σταθερά.

$$FE(\psi_\sigma \geq 0) : \quad h_c(\sigma) = \frac{1}{k_c^2} (\mathbf{s} - \sigma \xi) : (\mathbf{s} - \sigma \xi) - \sigma^2 = 0 \quad (16a)$$

$$FE(\psi_\sigma < 0) : \quad h_p(\sigma) = \frac{1}{k_p^2} (\mathbf{s} - \sigma \xi) : (\mathbf{s} - \sigma \xi) - \sigma \sigma_{PTC} = 0 \quad (16b)$$

όπου  $k_c$  και  $\xi$  είναι βαθμωτές και τανυστικές σταθερές, αντίστοιχα, που σχετίζονται με την κρίσιμη κλίση ( $M$ ),  $k_d$  είναι μια θετική σταθερά και  $k_p = k_c - k_d$   $\psi_\sigma$  είναι μια μεταβλητή (όμοια με τη μεταβλητή που χρησιμοποίησαν για τις άμμους οι Wood et al, 1994).



Σχήμα 4. Περιβάλλουσα αστοχίας και παράμετρος φάσης.

Figure 4. Failure envelope and phase parameter.

Το MSS-2 εφαρμόζει στο νόμο ροής την παράμετρο φάσης,  $\psi_\sigma$  (βλ. Σχήμα 2), για τη διάκριση μεταξύ διαστολικής και συστολικής κατάστασης, και εξαρτά τη διεκτροπική παραμόρφωση από την τρέχουσα ανισοτροπία. Αυτό αποτελεί μια σημαντική διαφοροποίηση σε σχέση με το προσομοίωμα των Kanvadas & Belokas (2001).

Οι σταθερές  $\lambda_1$  and  $\lambda_2$  ελέγχουν τη διεύθυνση της επαυξητικής πλαστικής παραμόρφωσης για καταστάσεις επί της SSE. Η συνάρτηση  $h_c$  αποτελεί τη γραμμή κρίσιμης κατάστασης σε όρους τάσης, ενώ η συνάρτηση  $h_p$  επιτρέπει την ύπαρξη τασικών οδεύσεων που τέμνουν τη γραμμή κρίσιμης κατάσταση  $h_c$  κατά τη διαστολική συμπεριφορά.

## 5. ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ

Το MSS-2 εφαρμόζει υπερελαστικότητα, η οποία προκύπτει από ένα ελαστικό δυναμικό παραμόρφωσης  $V^e$  (βλ. Μπελόκας, 2008):

$$\dot{\sigma} = K^e \dot{\varepsilon}_v^e + \frac{A\sigma}{\kappa(A\sigma + B)} \mathbf{s} : \dot{\mathbf{e}}^e \quad (17a)$$

$$K^e = \frac{\sigma}{\kappa}$$

$$\dot{\mathbf{s}} = \frac{A\sigma}{\kappa(A\sigma + B)} \mathbf{s} \dot{\varepsilon}_v^e + 2G^e \dot{\mathbf{e}}^e \quad (17b)$$

$$2G^e = 2(A\sigma + B) + \frac{A^2}{\kappa} \sigma \frac{\mathbf{s} : \mathbf{s}}{(A\sigma + B)^2}$$

$$V^e = p_r \exp\left(\frac{\varepsilon_v^e + \alpha \mathbf{e}^e : \mathbf{e}^e}{\rho_s}\right) \rho_s + \beta \mathbf{e} : \mathbf{e} \quad (18)$$

όπου  $\rho_s$ ,  $A$  και  $B$  are υπερελαστικές σταθερές.

## 5. ΠΛΑΣΤΙΚΟ ΜΕΤΡΟ ΚΡΑΤΥΝΣΗΣ

Για πλαστικές εντάσεις επί της SSE, το πλαστικό μέτρο κράτυνσης,  $H_f$ , προσδιορίζεται από τη «συνθήκη συμβατότητας», η οποία εξασφαλίζει πως η τασική κατάσταση παραμένει επί της PYE και οδηγεί στις εξισώσεις 19, 20 και 21:

$$H_{f_0} \equiv H_f = 2 \cdot \xi \cdot R_f \cdot T_f \quad (19)$$

$$T_f = (\sigma - \sigma_K) \sigma + \frac{1}{c^2} \left( \mathbf{s} - \frac{\sigma}{\sigma_K} \mathbf{s}_K \right) : \left[ \mathbf{s} - \frac{\sigma}{\sigma_K} \mathbf{s}_K + \frac{\sigma}{\sigma_K} \psi \left( \mathbf{s} - \frac{\sigma}{\sigma_K} \mathbf{s}_K \right) \right] \quad (20)$$

$$R_f = \frac{\alpha^* \left[ \left( \frac{1}{\rho_c - \rho_s} + A_v \right) \cdot P_f + A_q (\text{sign} \lambda_f) \sqrt{\frac{2}{3}} (\mathbf{P}'_f : \mathbf{P}'_f) \right]}{\alpha} \cdot \frac{\alpha \left[ A_v \cdot P_f + A_q (\text{sign} \lambda_f) \sqrt{\frac{2}{3}} (\mathbf{P}'_f : \mathbf{P}'_f) \right]}{\alpha} \quad (21)$$

Για πλαστικές εντάσεις επί της PYE, αλλά εντός της SSE, το πλαστικό μέτρο κράτυνσης προσδιορίζεται μέσω ενός νόμου προβολής, ο οποίος εξασφαλίζει ομαλή μεταβολή του  $H_f$  καθώς η PYE πλησιάζει την SSE:

$$H_f = H''_{f_0} + \mu |H''_{f_0}| \cdot \left\{ [1 - (\delta/\delta_0)]^\nu - 1 \right\} \quad (22)$$

όπου  $H''_{f_0}$  το πλαστικό μέτρο κράτυνσης στο σημείο  $M''$  (το σημείο στο οποίο το διάνυσμα  $\overline{OM}$  τέμνει την SSE, Σχήμα 3),  $\delta$  ένα κανονικοποιημένο μήκος του τμήματος  $MM''$  ( $M$  είναι η τρέχουσα κατάσταση),  $\delta_0$  η τιμή του  $\delta$  κατά την έναρξη της πλαστικής διαρροής και  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 (a/a' - 1)$  μια μεταβλητή με τα  $\gamma_1$  και  $\gamma_2$  θετικές σταθερές.

Η εξίσωση 22 είναι μια εξίσωση παρεμβολής μεταξύ των τιμών  $H_{f_0} = \infty$  (έναρξη διαρροής) και  $H_{f_0} = H''_{f_0}$  (όταν η τασική κατάσταση βρεθεί επί της SSE). Το σημείο  $M''$  προσδιορίζεται από τη συνθήκη  $F(\lambda\sigma; \sigma_K, \alpha) = 0$  και η παράμετρος  $\delta$  από την εξίσωση 23 (βλ. επίσης Kanvadas & Amorosi, 2000). Η παράμετρος  $\delta_0$  λαμβάνει την τρέχουσα τιμή  $\delta$  σε κάθε επανέναρξη της διαρροής. Συνεπώς, είναι  $\delta/\delta_0 = 1$  κατά την έναρξη της διαρροής,  $\delta/\delta_0 < 1$  σε οποιοδήποτε επόμενο στάδιο και  $\delta = 0$  όταν η κατάσταση βρίσκεται επί της.

$$\delta \equiv \frac{(\lambda - 1)}{2\alpha \|\mathbf{Q}\|} (\mathbf{Q} : \sigma) \quad (23)$$

Μια διαφοροποίηση από παλαιότερες εκδοχές του προσομοιώματος είναι ότι η μεταβλητή  $\gamma$  περιλαμβάνει την επίδραση της δομής στο πλαστικό μέτρο κράτυνσης.

## 6. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στο άρθρο παρουσιάστηκε η διατύπωση του ανισότροπου ελαστοπλαστικού Προσομοιώματος Εδαφών με Δομή (Model for Structured Soils, MSS-2).

Οι βασικότερες βελτιώσεις ως προς το προηγούμενο προσομοίωμα των Kavvasdas & Belokas (2001) αποτελούν: α) η εφαρμογή υπερελαστικότητας, β) η υιοθέτηση γραμμικών Εγγενών Καμπυλών Συμπίεσης ( $ICC_{\eta}$ ) στο επίπεδο  $\ln v - \ln \sigma$ , γ) η εξίσωση για την περιγραφή της εξάρτησης της θέσης των  $ICC_{\eta}$  με την ακτινική τασική όδευση έχει τροποποιηθεί, ώστε να λάβει υπόψη τη νέα μορφή των  $ICC_{\eta}$ , δ) η εφαρμογή της παραμέτρου φάσης,  $\psi_{\sigma}$ , στην ισότροπη συνιστώσα του πλαστικού δυναμικού για τον έλεγχο της διαστολικότητας – συστολικότητας, ε) η εξάρτηση της παραμέτρου φάσης από το μέγεθος της δομής, στ) η εξάρτηση της διεκτροπικής συνιστώσας του πλαστικού δυναμικού από την ανισοτροπία της δομής και ζ) η εξάρτηση του πλαστικού μέτρου κράτυσης από το μέγεθος της δέσης (bonding).

Συγκριτικά με το MSS προσομοίωμα των Kavvasdas & Amorosi (2000) οι βασικότερες διαφοροποιήσεις, εκτός των ανωτέρω, είναι η εφαρμογή: α) στριμμένων – στρεβλών ελλειψοειδών για τις χαρακτηριστικές περιβάλλουσες, β) ενός διαφορετικού μηχανισμού απομείωσης της δέσης και γ) της Περιβάλλουσας Εγγενούς Αντοχής (ISE).

## 6. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Been, K. and Jefferies, M.G. (1985), "A state parameter for sands". *Geotechnique*, Vol. 35, No. 2, pp. 99-112.
- Belokas G. and Kavvasdas, M. (2010a). "An Intrinsic Compressibility Framework for Clayey Soils". *Geotechnical and Geological Engineering* (accepted for publication with modifications).
- Belokas G. and Kavvasdas, M. (2010b), "An Anisotropic Model for Structured Soils. Part I: Theory". *Computers and Geotechnics* (accepted for publication).
- Gens A. (1982), "Stress-strain and strength of a low plasticity clay". Ph.D. Thesis. Imperial College of Science, Technology and Medicine. University of London.
- Kavvasdas, M. (1983), "A constitutive model for clays based on non-associated anisotropic elasto-plasticity". *Proc. of the 2nd Int. Conf.*

on Constitutive Laws for Engineering Materials, in Tucson, pp. 263-270.

Kavvasdas, M. (1998), "Hard Soils - Soft Rocks: Modelling the soil behaviour - Selection of soil parameters, General Report". *Proc. 2<sup>nd</sup> Int. Symp. on the Geotechnics of Hard Soils – Soft Rock*, in Napoli, pp. 1441-1482.

Kavvasdas, M. and Amorosi, A. (2000), "A constitutive model for structured soils". *Geotechnique*, Vol. 50. No. 1, pp. 263-273.

Kavvasdas, M.J. and Belokas, G. (2001), "An anisotropic elastoplastic constitutive model for natural soils". *Proc. 10<sup>th</sup> Int. Conf. on Computer Methods and Advances in Geomechanics (IACMAG)*, in Tucson, Arizona, pp. 335-340.

Leroueil S., and Vaughan, P.R. (1990), "The general and congruent effects of structure in natural soils and weak rocks". *Geotechnique*. Vol. 40, No. 3, pp. 467-488.

Lewin, P.I. and Burland, J.B. (1970), "Stress-probe experiments on saturated normally consolidated clay". *Geotechnique*. Vol. 20, No. 1, pp. 38-56.

Μπελόκας, Γ. (2008), "Προσομοίωση της Μηχανικής Συμπεριφοράς Δομημένων και Ανισότροπων Εδαφικών Υλικών". Διδακτορική Διατριβή. Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο.

Μπελόκας, Γ. και Καββαδάς, Μ. (2010α). "Εφαρμογή ενός νέου ελαστοπλαστικού προσομοιώματος στον κώδικα πεπερασμένων στοιχείων ABAQUS". 6<sup>ο</sup> Πανελλήνιο Συνέδριο Γεωπεριβαλλοντικής και Γεωτεχνικής Μηχανικής.

Μπελόκας, Γ. και Καββαδάς, Μ. (2010β). "Η Μηχανική Συμπεριφορά της Αναζυμωμένης Αργίλου Vallericca υπό Συνθήκες Ακτινικής Συμπίεσης". 6<sup>ο</sup> Πανελλήνιο Συνέδριο Γεωπεριβαλλοντικής και Γεωτεχνικής Μηχανικής.

Roscoe, K.H., Schofield, A.N. & Thurairajah, A. (1963), "Yielding of clays in states wetter than critical". *Geotechnique*, Vol. 13, No. 3, pp. 211-240.

Wood, D.M., Belkheir, K. and Liu, D.F. (1994), "Strain softening and state parameter for sand modelling. Technical Note". *Geotechnique*, Vol. 44, No. 2, pp. 335-339.