

## Ανάλυση και Σχεδιασμός Δοκών από Ινοσκυρόδεμα με Χαλύβδινες Ίνες υπό Κάμψη

**Κωνσταντίνος Χαλιορής**

*Αναπληρωτής Καθηγητής Δ.Π.Θ., [chaliori@civil.duth.gr](mailto:chaliori@civil.duth.gr)*

**Θωμάς Παναγιωτόπουλος**

*Διπλ. Πολιτικός Μηχανικός Μ.Σc., υποψ. διδ. Δ.Π.Θ., [thomas.a.panagiotoopoulos@gmail.com](mailto:thomas.a.panagiotoopoulos@gmail.com)*

### 1. Εισαγωγή

Η διατύπωση αναλυτικών εκφράσεων για την προσομοίωση της συνολικής συμπεριφοράς του σκυροδέματος υπό θλίψη και εφελκυσμό αποτελεί βασική προϋπόθεση για την ανάλυση και τον σχεδιασμό δομικών στοιχείων και κατασκευών. Όλα τα λογισμικά πεπερασμένων στοιχείων και ανάλυσης δομικών στοιχείων και κατασκευών απαιτούν τη χρήση κατάλληλων αναλυτικών σχέσεων έντασης - παραμόρφωσης που προσομοιώνουν τη συμπεριφορά των υλικών και χρησιμοποιούνται ως δεδομένα για την ανάλυση. Έχουν ήδη προταθεί αναλυτικές εκφράσεις για την προσομοίωση της συμπεριφοράς του σκυροδέματος, οι οποίες προσεγγίζουν με διαφορετικό τρόπο την ελαστική και τη μετά τη ρηγμάτωση (μετελαστική) απόκριση του υλικού τόσο για την περίπτωση της θλίψης, όσο και για την περίπτωση του εφελκυσμού. Οι αναλυτικές αυτές σχέσεις δεν μπορούν να εφαρμοστούν στις περιπτώσεις στοιχείων από σκυρόδεμα στο οποίο έχουν προστεθεί χαλύβδινες ίνες (ινοσκυρόδεμα) διότι η απόκριση του ινοσκυροδέματος διαφέρει σημαντικά από αυτή του απλού (ή αλλιώς άοπλου, χωρίς ίνες) σκυροδέματος, κυρίως στο μετελαστικό στάδιο (Vougioukas et al. 2005, Παπαθεοχάρης κ.ά. 2008, Tsonos 2009, Chalioris 2013a, 2013b).

Στην παρούσα εργασία αναπτύσσονται ειδικές βελτιωμένες σχέσεις τάσεων και παραμορφώσεων για το ινοσκυρόδεμα υπό θλίψη και εφελκυσμό, οι οποίες βασίζονται και τεκμηριώνονται με τα πειραματικά αποτελέσματα ευρείας βάσης δεδομένων. Εν συνεχεία, βάσει των σχέσεων αυτών διερευνάται αναλυτικά και προσδιορίζεται η συμπεριφορά διατομών από ινοσκυρόδεμα με ή χωρίς διαμήκεις ράβδους υπό καθαρή μονοαξονική κάμψη. Ειδικότερα, προτείνεται ένα αναλυτικό μοντέλο για την ανάλυση διατομών σε κάμψη τα αποτελέσματα του οποίου συγκρίνονται με αντίστοιχα πειραματικά. Τα αποτελέσματα που συγκρίνονται είναι η αντοχή των δομικών στοιχείων σε κάμψη καθώς και η συνολική απόκριση σε μορφή διαγράμματος ροπών - καμπυλοτήτων. Επίσης, το προτεινόμενο μοντέλο χρησιμοποιείται ως εργαλείο ανάλυσης για την εξαγωγή συμπερασμάτων σχετικά με την απαιτούμενη περιεκτικότητα και το είδος ινών στο μείγμα του ινοσκυροδέματος ώστε να επιτευχθούν συγκεκριμένοι στόχοι σχεδιασμού έναντι κάμψης σε επίπεδο αντοχής ή/και πλαστιμότητας καμπυλοτήτων. Ακόμα, γίνεται σύγκριση των αποτελεσμάτων της προτεινόμενης μεθοδολογίας με αυτά που προκύπτουν από τον Ιταλικό Κανονισμό (CNR 2007) σε δοκούς από ινοσκυρόδεμα.

## 2. Προσομοίωση θλιπτικής συμπεριφοράς

Πειραματικά αποτελέσματα έχουν αποδείξει ότι η προσθήκη χαλύβδινων ινών στο σκυρόδεμα αυξάνει σε σχετικά μικρό βαθμό τη θλιπτική αντοχή και σε σημαντικό την παραμόρφωση αστοχίας. Ο φθίνων μετελαστικός κλάδος της απόκρισης του ινοσκυροδέματος εμφανίζει σαφώς μικρότερη κλίση έναντι αυτού του απλού σκυροδέματος. Αυτό συμβαίνει διότι μετά την πρώτη ρηγμάτωση του σκυροδέματος, οι προστιθέμενες χαλύβδινες ίνες που “συναντούν” μια ρωγμή, η οποία σχηματίζεται από τον αναπτυσσόμενο εγκάρσιο εφελκυσμό, ανθίστανται στη διεύρυνσή της γεφυρώνοντάς την (Chalioris and Karayannis 2009). Η σταδιακή αστοχία ορισμένου κάθε φορά αριθμού ινών μέσω της εξόλκευσής τους προσδίδει στο ινοσκυρόδεμα μια ψευδο-πλάστιμη συμπεριφορά στο ινοσκυρόδεμα έναντι θλίψης, το οποίο τελικώς εμφανίζει βελτιωμένη συμπεριφορά και καλύτερα μηχανικά χαρακτηριστικά έναντι του απλού σκυροδέματος (Tegos 1989, Manolis et al. 1997, Soulioti et al. 2011). Τυπικές πειραματικές καμπύλες θλιπτικών τάσεων - παραμορφώσεων για το απλό και το ινοσκυρόδεμα παρουσιάζονται συγκριτικά στο Σχ. 1 (Chalioris 2013b, Chalioris and Liotoglou 2015).

Η προσέγγιση της απόκρισης του ινοσκυροδέματος υπό θλίψη με κάποια αναλυτική σχέση έχει την ακόλουθη γενική μορφή και διακρίνεται σε δύο τμήματα. Το πρώτο τμήμα περιγράφει τον ανοδικό κλάδο της καμπύλης μέχρι το σημείο της μέγιστης αντοχής, ενώ το δεύτερο τμήμα περιγράφει τον φθίνοντα μετελαστικό κλάδο μετά τη μέγιστη αντοχή. Ο ανοδικός κλάδος προσομοιώνεται με την γνωστή αναλυτική καμπύλη του Hognestad σύμφωνα με τη σχέση:

$$\sigma_{c,sfc} = f_{c,SFC} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{co,SFC}} \right)^n \right], n = 2.0 \quad (1)$$

όπου  $f_{c,SFC}$  = η μέγιστη θλιπτική αντοχή του ινοσκυροδέματος,  $\varepsilon_{co,SFC}$  = η παραμόρφωση που αντιστοιχεί στη μέγιστη τάση,  $n$  = εκθέτης της παραβολής του Hognestad ( $n = 2.0$ ).

Για τον προσδιορισμό της μέγιστης θλιπτικής αντοχής του ινοσκυροδέματος  $f_{c,SFC}$  και της αντίστοιχης παραμόρφωσης  $\varepsilon_{o,SFC}$  εισάγεται ο συντελεστής  $F$  ο οποίος λαμβάνει υπόψη το ποσοστό των ινών κατ' όγκο, την γεωμετρία των ινών (μήκος – διάμετρος) και τον τύπο των ινών και εκφράζεται από τη σχέση (Narayanan and Darwish 1987, Chalioris 2013a):

$$F = \beta V_f \frac{\ell_f}{d_f} \quad (2)$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 0.50, \text{ίνες χωρίς διαμορφωμένες άκρες} \\ 0.75, \text{ίνες με διαμορφωμένες άκρες} \\ 1.00, \text{ίνες κυματοειδούς μορφής} \end{pmatrix} \quad (3)$$

όπου  $\beta$  = συντελεστής που εξαρτάται από τον τύπο των ινών,  $V_f$  = το ποσοστό των ινών,  $\ell_f$  = το μήκος της ίνας,  $d_f$  = η διάμετρος της ίνας.

Βάσει του συντελεστή  $F$  υπολογίζεται η μέγιστη αντοχή  $f_{c,SFC}$  και η αντίστοιχη παραμόρφωση  $\varepsilon_{o,SFC}$  σύμφωνα με τις σχέσεις (Chalioris and Liotoglou 2015):

$$f_{c,SFC} = \begin{cases} f_c [0.2315F + 1], & f_c \leq 50 \text{ MPa} \\ f_c [0.2225F + 1], & f_c > 50 \text{ MPa} \end{cases} \quad (4)$$

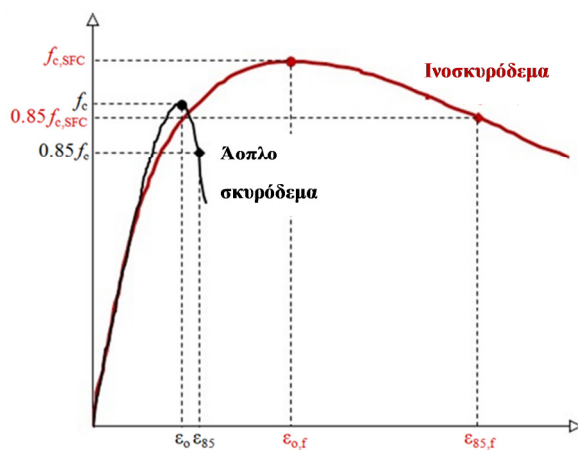
$$\varepsilon_{co,SFC} = \varepsilon_{co}(0.95 F + 1) \quad (5)$$

όπου  $f_c$  = η θλιπτική αντοχή του άοπλου σκυροδέματος,  $\varepsilon_{co}$  = η παραμόρφωση στη μέγιστη τάση για το άοπλο σκυρόδεμα ( $\varepsilon_{co} = 2\%$ ).

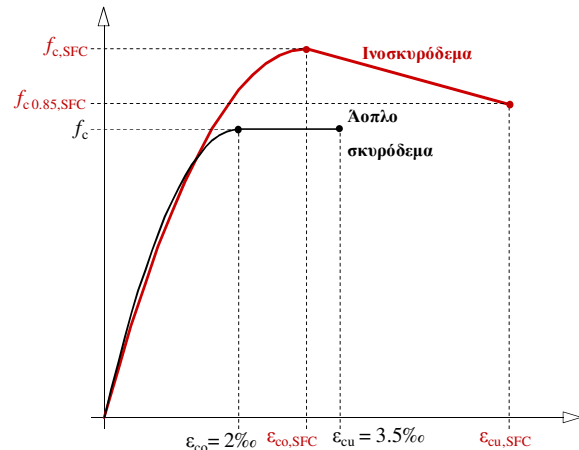
Ο φθίνων μετελαστικός κλάδος προσεγγίζεται με ευθεία γραμμή από την τιμή της μέγιστης τάσης  $f_{c,SFC}$  έως την τιμή της τάσης που φτάνει στο 85% της μέγιστης. Η αντίστοιχη παραμόρφωση  $\varepsilon_{cu,SFC}$  υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\varepsilon_{cu,SFC} = \varepsilon_{co,SFC}(1.4 F + 1) \quad (6)$$

Με τα παραπάνω προσδιορίζεται πλήρως το διάγραμμα θλιπτικών τάσεων - παραμορφώσεων ( $\sigma - \varepsilon$ ) του ινοσκυροδέματος το οποίο και απεικονίζεται στο Σχ. 2 και συγκρίνεται με το αντίστοιχο διάγραμμα  $\sigma - \varepsilon$  του απλού σκυροδέματος υπό θλίψη που χρησιμοποιείται για ανάλυση στοιχείων σε κάμψη σύμφωνα με τον Ευρωκώδικα 2 (CEN 2004).



Σχ. 1. Πειραματικές καμπύλες  $\sigma - \varepsilon$



Σχ. 2. Απλοποιημένα διαγράμματα  $\sigma - \varepsilon$

Η παρακάτω σχέση αποδίδει τη θλιπτική τάση σε συνάρτηση με την παραμόρφωση:

$$\sigma_c(\varepsilon) = \begin{cases} f_{c,SFC} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{co,SFC}} \right)^2 \right], & 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{co,SFC} \\ f_{c,SFC} \left[ 1 - 0.15 \frac{(\varepsilon - \varepsilon_{co,SFC})}{\varepsilon_{cu,SFC} - \varepsilon_{co,SFC}} \right], & \varepsilon_{co,SFC} < \varepsilon \leq \varepsilon_{cu,SFC} \end{cases} \quad (7)$$

### 3. Προσομοίωση εφελκυστικής συμπεριφοράς

Στην περίπτωση του εφελκυσμού το ινοσκυρόδεμα αποκρίνεται γραμμικά μέχρις ότου η εφελκυστική τάση φτάσει λίγο πιο πάνω από την εφελκυστική αντοχή του απλού σκυροδέματος. Οι πρώτες ρωγμές εκδηλώνονται όταν η εφελκυστική τάση γίνει ίση με την τιμή της εφελκυστικής τάσης (αντοχής) αρχικής ρηγμάτωσης  $f_{cr,f}$  και η παραμόρφωση ίση με την αντίστοιχη τιμή  $\varepsilon_{cr,f}$  (Σχ. 3). Μετά τη ρηγμάτωση η εφελκυστική τάση  $f_{cf}$  μπορεί να είναι μικρότερη ή μεγαλύτερη από την τάση ρηγμάτωσης  $f_{cr,f}$ . Η απόκριση του ινοσκυροδέματος μετά τη ρηγμάτωση διαφέρει σημαντικά στα

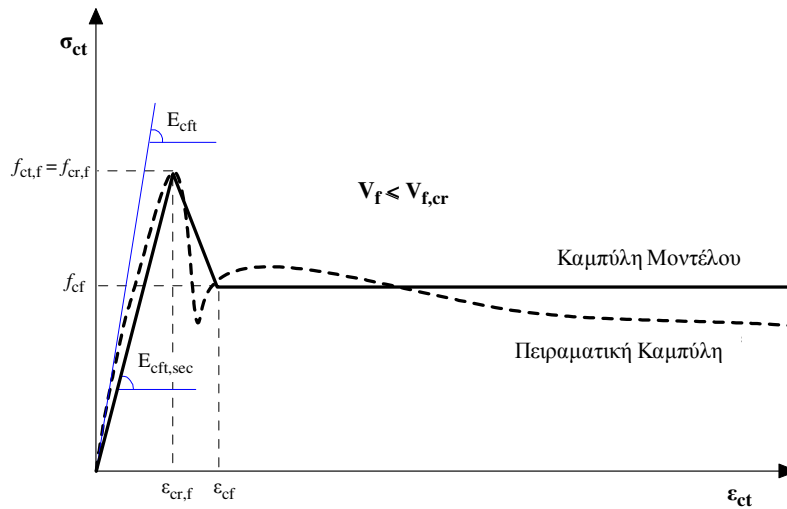


$$\ell_{cr} = 0.5 f_{uf} \frac{d_f}{\tau_u} \quad (12)$$

$$\tau_u = \frac{P_u}{\pi d_f \ell_{fr}} \quad (13)$$

όπου  $\ell_{fr}$  = το μήκος έμπηξης της ίνας στο μείγμα και  $P_u$  = το φορτίο εξόλκευσης της ίνας.

Στην περίπτωση που το ογκομετρικό ποσοστό των προστιθέμενων ινών,  $V_f$ , είναι μικρότερο από το κρίσιμο ( $V_f \leq V_{f,cr}$ ) τότε προτείνεται η τριγωνική σχέση τάσεων - παραμορφώσεων ( $\sigma - \epsilon$ ), όπως φαίνεται στο Σχ. 4.



Σχ. 4. Προσομοίωση και τυπικό πειραματικό διάγραμμα τάσεων - παραμορφώσεων για το ινοσκυρόδεμα υπό άμεσο εφελκυσμό ( $V_f \leq V_{f,cr}$ )

Ο πρώτος κλάδος απόκρισης καθορίζεται από το σημείο που αντιστοιχεί στην αντοχή ρηγμάτωσης  $f_{cr,f}$  που είναι και η μέγιστη αντοχή ( $f_{ct,f} = f_{cr,f}$ ), και το μέτρο ελαστικότητας χορδής  $E_{cft,sec}$  στο σημείο της μέγιστης αντοχής. Μετά το σημείο αυτό η τάση μειώνεται γραμμικά και απότομα μέχρι ενός χαρακτηριστικού σημείου με την τάση  $f_{cf}$ . Ο υπολογισμός των χαρακτηριστικών σημείων ( $f_{cr,f}$ ,  $\epsilon_{cr,f}$ ) και ( $f_{cf}$ ,  $\epsilon_{cf}$ ) για τον πλήρη προσδιορισμό της απόκρισης γίνεται με βάση τις παρακάτω σχέσεις (Bentur and Mindess 1990, Karayannis 2000a, 200b):

$$E_{ct,sec} = \frac{f_{ct}}{\epsilon_{cr}} \quad (14)$$

$$f_{ct,f} = f_{cr,f} = \epsilon_{cr,f} E_{cft,sec} \quad (15)$$

$$E_{cft,sec} = \frac{3}{8} E_{cfL,sec} + \frac{5}{8} E_{cfT,sec} \quad (16)$$

$$\epsilon_{cr,f} = n_\ell n_{oe} V_f (\epsilon_{yf} - \epsilon_{cr}) + \epsilon_{cr} \quad (17)$$

$$E_{cfL,sec} = E_{ct,sec} (1 - V_f) + E_f V_f \quad (18)$$

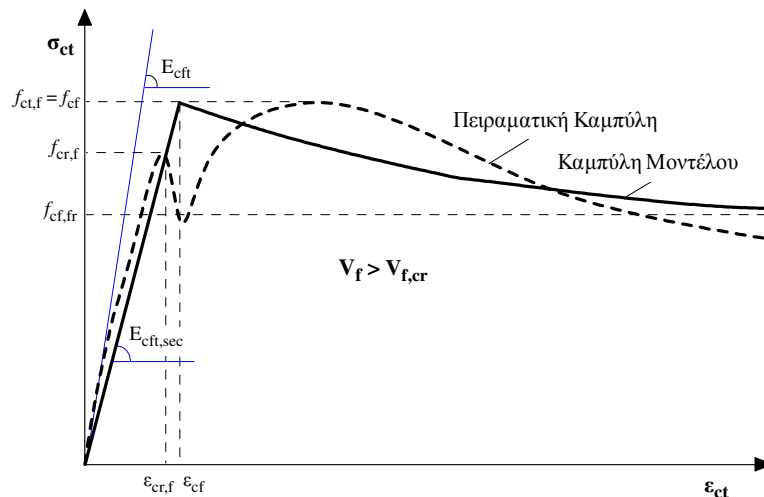
$$E_{cfT,sec} = \frac{E_f E_{ct,sec}}{E_f (1 - V_f) + E_{ct,sec} V_f} \quad (19)$$

$$f_{cf} = n_\ell n_{op} \sigma_{fu} V_f \quad (20)$$

$$\epsilon_{cf} = \alpha_f \epsilon_{cr,f} \quad (21)$$

όπου  $f_{ct}$  = η εφελκυστική αντοχή του άοπλου σκυροδέματος,  $\varepsilon_{cr}$  = η παραμόρφωση ρηγμάτωσης του άοπλου σκυροδέματος ( $\varepsilon_{cr} \approx 0.15\text{‰}$ ),  $E_{ct,sec}$  = το μέτρο ελαστικότητας χορδής του άοπλου σκυροδέματος,  $E_f$  = το μέτρο ελαστικότητας των ινών,  $n_{oe}$  = συντελεστής απόδοσης της κατανομής των ινών για το ελαστικό στάδιο ( $n_{oe} = 0.167$  για σκυρόδεμα &  $n_{oe} = 0.20$  για τσιμεντοκονίαμα),  $\varepsilon_{yf}$  = παραμόρφωση διαρροής της ίνας ( $\varepsilon_{yf} = f_{yf}/E_f$ ,  $f_{yf}$  = τάση διαρροής των ινών),  $n_{op}$  = συντελεστής απόδοσης της κατανομής των ινών για το μετελαστικό στάδιο ( $n_{oe} = 0.405$ ) (Sorousian and Lee 1990),  $\alpha_f$  = συντελεστής που εξαρτάται από τον τύπο των ινών ( $\alpha_f = 2$  για ευθύγραμμες ίνες,  $\alpha_f = 2 - 8$  για ίνες με άκρα διαμορφωμένα ως αγκύρια).

Στην περίπτωση που το ογκομετρικό ποσοστό των προστιθέμενων ινών  $V_f$ , είναι μεγαλύτερο από το κρίσιμο ποσοστό ( $V_f > V_{f,cr}$ ) τότε προτείνεται σχέση τάσεων - παραμορφώσεων ( $\sigma - \varepsilon$ ) που αποτελείται από δύο κλάδους απόκρισης, έναν ανοδικό γραμμικό και έναν πτωτικό μετελαστικό κλάδο εκθετικής μορφής, όπως φαίνεται στο Σχ. 5.



Σχ. 5. Προσομοίωση και τυπικό πειραματικό διάγραμμα τάσεων - παραμορφώσεων για το νισκυρόδεμα υπό άμεσο εφελκυσμό ( $V_f > V_{f,cr}$ ).

Στην περίπτωση αυτή απαιτείται ο προσδιορισμός ενός μόνο σημείου, το οποίο έχει ως τάση τη μέγιστη αντοχή  $f_{ct,f}$ , η οποία είναι μεγαλύτερη από την αντοχή που εμφανίζει το άοπλο σκυρόδεμα κατά τη στιγμή της ρηγμάτωσης  $f_{cr,f}$ . Η αντίστοιχη παραμόρφωση  $\varepsilon_{cf}$  προσδιορίζεται με βάση το ισοδύναμο μέτρο ελαστικότητας χορδής  $E_{cft,sec}$ . Ο υπολογισμός των χαρακτηριστικών σημείων ( $f_{ct,f} = f_{cf}$ ,  $\varepsilon_{cf}$  και  $f_{cf,fr}$ ) για τον πλήρη προσδιορισμό της απόκρισης γίνεται με βάση τις παρακάτω σχέσεις (Bentur and Mindess 1990):

$$f_{ct,f} = f_{cf} = n_\ell n_{op} \sigma_{fu} V_f \quad (22)$$

$$\varepsilon_{cf} = \frac{f_{ct,f}}{E_{cft,sec}} \quad (23)$$

Ο κλάδος που καθορίζει τη μετελαστική συμπεριφορά περιγράφεται με μια εκθετική καμπύλη, η οποία τείνει ασυμπτωτικά στην οριζόντια γραμμή που ορίζει η εφελκυστική τάση τριβής μετά τη ρηγμάτωση. Η τιμή αυτής της τάσης υπολογίζεται σύμφωνα με τη σχέση:

$$f_{cf,fr} = 2 n_\ell n_o \tau_{fr} V_f \frac{\ell_f}{d_f} \quad (24)$$

όπου  $\tau_{fr}$  = η αναπτυσσόμενη τριβή μεταξύ ίνας και σκυροδέματος.

Η εξίσωση της εκθετικής συνάρτησης του Σχ. 5 είναι:

$$\sigma_\varepsilon = f_{cf,fr} + (f_{ct,f} - f_{cf,fr}) e^{-k\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{cf}} - 1\right)}, \varepsilon > \varepsilon_{cf} \quad (25)$$

όπου  $k$  = συντελεστής της εκθετικής καμπύλης (εξαρτάται από τα πειραματικά δεδομένα και λαμβάνεται ως:  $k \approx 0.05$  έως  $0.10$ )

Οι σχέσεις που αποδίδουν την αναπτυσσόμενη εφελκυστική τάση του ινοσκυροδέματος σε συνάρτηση με την παραμόρφωση είναι:

Για την περίπτωση όπου  $V_f \leq V_{f,cr}$ :

$$\sigma_f(\varepsilon) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{f_{ct,f}}{\varepsilon_{cr,f}} \varepsilon, 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{cr,f} \\ f_{ct,f} - \frac{f_{ct,f} - f_{cf}}{\varepsilon_{cf} - \varepsilon_{cr,f}} \varepsilon, \varepsilon_{cr,f} < \varepsilon \leq \varepsilon_{cf} \\ f_{cf}, \varepsilon_{cf} < \varepsilon \end{array} \right\} \quad (26)$$

Για την περίπτωση όπου  $V_f > V_{f,cr}$ :

$$\sigma_f(\varepsilon) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{f_{cf}}{\varepsilon_{cf}} \varepsilon, 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{cf} \\ f_{cf,fr} + (f_{ct,f} - f_{cf,fr}) e^{-k\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{cf}} - 1\right)}, \varepsilon_{cf} < \varepsilon \end{array} \right\} \quad (27)$$

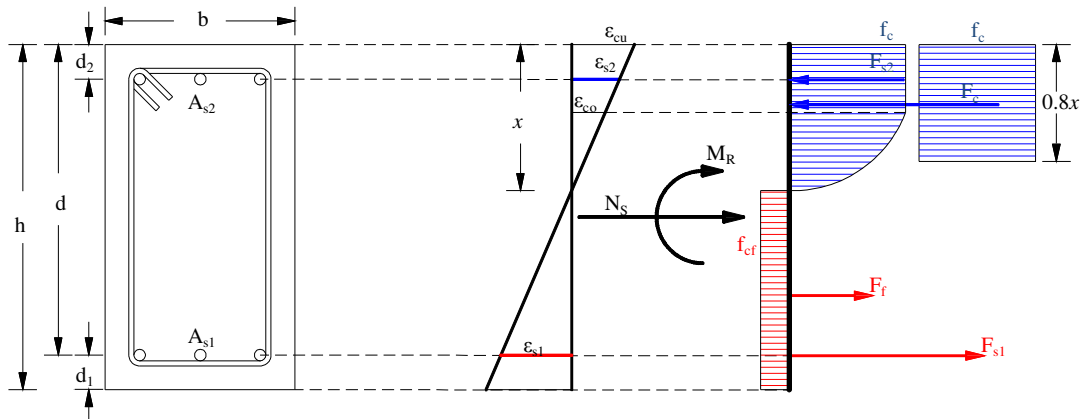
#### 4. Προτεινόμενο μοντέλο ανάλυσης καμπτικής συμπεριφοράς

Σύμφωνα με όσα αναπτύχθηκαν προηγουμένως προκύπτει ότι η προσθήκη ινών στο σκυρόδεμα επηρεάζει σημαντικά την απόκριση τόσο σε επίπεδο έντασης όσο και παραμόρφωσης. Είναι επομένως αναμενόμενο ότι η προσθήκη ινών επηρεάζει και την καμπτική συμπεριφορά δομικών στοιχείων από ινοσκυρόδεμα. Διεθνώς έχουν αναπτυχθεί αρκετές μέθοδοι για τη διερεύνηση της καμπτικής συμπεριφοράς δοκών από ινοσκυρόδεμα (Ashour and Wafa 1993, Ashour et al. 2000). Γενικά όλες οι μέθοδοι θεωρούν μία επιπλέον εφελκυστική δύναμη η οποία οφείλεται στην εφελκυστική αντοχή του ινοσκυροδέματος, μέσω της οποίας αυξάνεται η ροπή αντοχής του καμπτόμενου στοιχείου.

Αυτή η μεθοδολογία έχει υιοθετηθεί και από τον Ιταλικό Κανονισμό (CNR 2007) για τον σχεδιασμό στοιχείων από ινοσκυρόδεμα, ο οποίος λαμβάνει υπόψη τη συνεισφορά των ινών στην εφελκυστική περιοχή, θεωρώντας ότι η εφελκυστική τάση έχει μία σταθερή τιμή σε ολόκληρο το ύψος της εφελκυστικής ζώνης, αγνοώντας την οποιαδήποτε συνεισφορά των ινών στη θλιπτική συμπεριφορά. Η επιρροή όμως αυτή είναι σημαντική κυρίως ως προς την καμπυλότητα αστοχίας, καθότι το ινοσκυρόδεμα δύναται να παραμορφωθεί σε θλιπτική παραμόρφωση μεγαλύτερη του 3.5%. Αυτό έχει



ως αποτέλεσμα την αύξηση της καμπυλότητας της διατομής στην αστοχία. Η συμπεριφορά μίας τυπικής διατομής από ινοσκυρόδεμα σύμφωνα με τις διατάξεις - μοντέλο του Ιταλικού Κανονισμού (CNR 2007, CEN 2004) απεικονίζεται στο Σχ. 6.



Σχ. 6. Μοντέλο ανάλυσης διατομών σε κάμψη κατά τον Ιταλικό Κανονισμό (CNR 2007)

Στην παρούσα εργασία προτείνεται ένα νέο μοντέλο για την ανάλυση διατομών από ινοσκυρόδεμα σε κάμψη το οποίο λαμβάνει υπόψη την επιρροή των ινών στη συνολική συμπεριφορά. Η επιρροή αυτή εισάγεται μέσω των βελτιωμένων σχέσεων τάσεων - παραμορφώσεων τόσο τον εφελκυσμό όσο και για τη θλίψη. Για την εφαρμογή των αναλυτικών σχέσεων καταρτήθηκε ένα αριθμητικό προσομοίωμα ανάλυσης διατομών το οποίο βασίζεται στον χωρισμό της διατομής σε ένα διακριτό αριθμό λωρίδων – επί μέρους στοιχείων. Η επιμέρους κατανομή των τάσεων αποδίδεται σε ολόκληρο το ύψος της διατομής με τρόπο συνεχή έτσι όπως φαίνεται στο Σχ. 7.

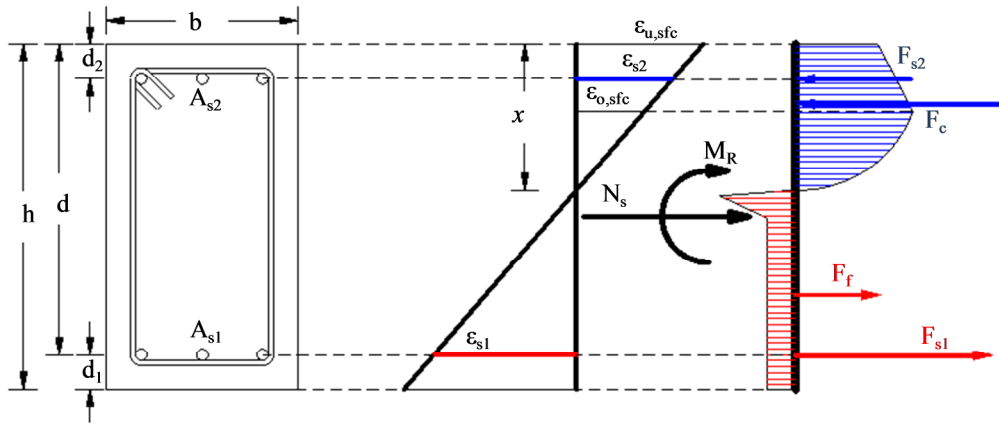
Κάθε επί μέρους στοιχείο έχει μία ξεχωριστή ένταση η οποία βασίζεται στις αναλυτικές καμπύλες τάσεων - παραμορφώσεων, λαμβάνοντας τιμές ανάλογα με την αντίστοιχη παραμόρφωση στην οποία βρίσκεται το κέντρο βάρους του. Οι τάσεις και οι παραμορφώσεις του κάθε λωρίδας - στοιχείου υπολογίζονται σύμφωνα με τις σχέσεις:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{|\varepsilon_{u,SFC}|}{|\varepsilon_{u,SFC}| + \varepsilon_s} d \\ \sigma_{ci} = \sigma_{ci}(\varepsilon) \text{ (από (7))} \\ \sigma_{fi} = \sigma_{fi}(\varepsilon) \text{ (από (26) και (27))} \\ \varepsilon_{s1} = \varepsilon_s \\ \varepsilon_i = \frac{\varepsilon_{u,SFC}}{x} (x - y_i) \\ \varepsilon_{s2} = \frac{\varepsilon_{u,SFC}}{x} (x - d_2) \end{array} \right. \quad (28)$$

όπου  $x$  = το βάθος της θλιβόμενης ζώνης,  $\sigma_{ci}$  = οι θλιπτικές τάσεις κάθε στοιχείου (με αρνητικό πρόσημο),  $\sigma_{fi}$  = οι εφελκυστικές τάσεις κάθε στοιχείου,  $\varepsilon_i$  = η παραμόρφωση στο κέντρο βάρους



κάθε στοιχείου (θεωρείται θετική όταν αυξάνει το μήκος),  $\varepsilon_{u,sfc}$  = η παραμόρφωση της ακραίας θλιβόμενης ίνας (με αρνητικό πρόσημο),  $\varepsilon_{s1}$  = η παραμόρφωση στη στάθμη του εφελκόμενου χάλυβα,  $\varepsilon_{s2}$  = η παραμόρφωση στη στάθμη του θλιβόμενου χάλυβα,  $d$  = το στατικό ύψος της διατομής,  $y_i$  = η απόσταση του κέντρου βάρους κάθε στοιχείου από την ακραία θλιβόμενη ίνα.



Σχ. 7. Προτεινόμενο μοντέλο ανάλυσης διατομών σε κάμψη

Λαμβάνοντας ως δεδομένες τις τάσεις που έχουν υπολογισθεί από τις σχέσεις (28) και με βάση τη διακριτοποίηση της διατομής προκύπτουν τα φορτία των λωρίδων - στοιχείων τα οποία υπολογίζονται από τις σχέσεις:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_i = b \cdot dy \\ dy = h/n \\ F_{ci} = A_i \sigma_{ci} \\ F_{fi} = A_i \sigma_{fi} \\ F_{si} = A_{si} \sigma_{si} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} F_c = \sum F_{ci} \\ F_f = \sum F_{fi} \\ F_s = \sum F_{si} \end{array} \right. \quad (29)$$

όπου  $A_i$  = το εμβαδόν του κάθε στοιχείου - λωρίδας,  $b$  = το πλάτος της διατομής,  $h$  = το ύψος της διατομής,  $n$  = ο αριθμός των στοιχείων - λωρίδων της διακριτοποίησης,  $F_{ci}$  = η θλιπτική δύναμη του κάθε στοιχείου - λωρίδας (αρνητικό πρόσημο),  $F_{fi}$  = η εφελκυστική δύναμη του κάθε στοιχείου - λωρίδας (θετικό πρόσημο),  $F_{si}$  = η δύναμη των συμβατικών - χαλύβδινων ράβδων οπλισμού,  $A_{si}$  = το εμβαδόν της διατομής των αντίστοιχων ράβδων του συμβατικού χαλύβδινου οπλισμού,  $\sigma_{si}$  = η τάση των αντίστοιχων ράβδων του συμβατικού χαλύβδινου οπλισμού (θετική για εφελκυσμό).

Βάσει των σχέσεων (29) προκύπτουν τα φορτία της διατομής τα οποία υπολογίζονται από τις σχέσεις:

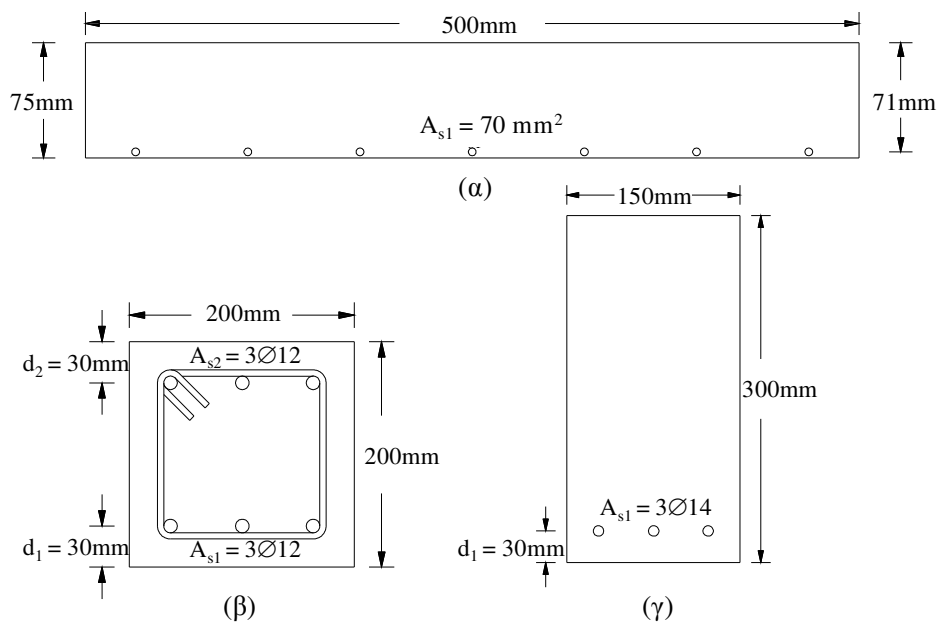
$$N_s = \sum F_{si} + \sum F_{fi} - \sum |F_{ci}| = F_s + F_f - |F_c| \quad (30)$$

$$M_R = \sum (F_{ci} z_i) + \sum (F_{fi} z_i) + \sum (F_{si} z_{si}) \quad (31)$$

όπου  $z_i$  = η απόσταση του κέντρου βάρους του κάθε στοιχείου από το κέντρο βάρους της διατομής,  $z_{si}$  = η απόσταση του κέντρου βάρους των οπλισμών από το κέντρο βάρους της διατομής (μετρούμενες θετικά προς την εφελκυσόμενη ίνα).

## 5. Αποτελέσματα και συγκρίσεις

Τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την εφαρμογή του προτεινόμενου μοντέλου ανάλυσης διατομών και δομικών στοιχείων από ινοσκυρόδεμα σε κάμψη ελέγχονται και αντιπαραβάλλονται με εκείνα που προκύπτουν από τη χρήση των διατάξεων του Ιταλικού Κανονισμού (CNR 2007) καθώς και με διαθέσιμα αποτελέσματα από βάση πειραματικών δεδομένων της διεθνούς βιβλιογραφίας. Τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των διατομών πάνω στις οποίες εφαρμόστηκε το προτεινόμενο μοντέλο κάμψης παρουσιάζονται στο Σχ. 8.



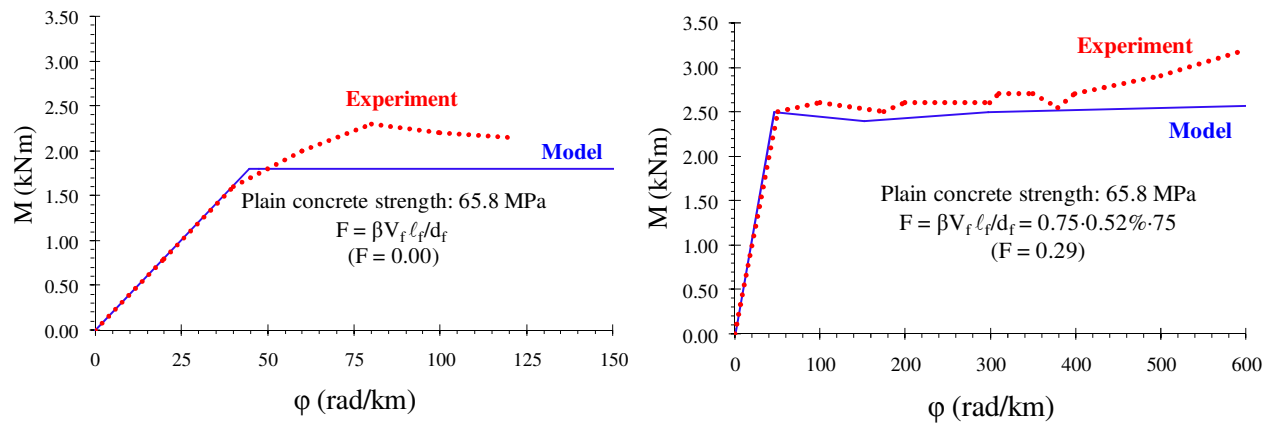
Σχ. 8. Διατομές ελέγχου: (α) Barros and Figueiras (1999), (β) Τυπική διατομή με συμμετρικό οπλισμό, (γ) Ζέρης κ.ά. (2009)

Οι μηχανικές παράμετροι των υλικών για την κάθε διατομή, παρουσιάζονται στον Πίνακα 1 που ακολουθεί:

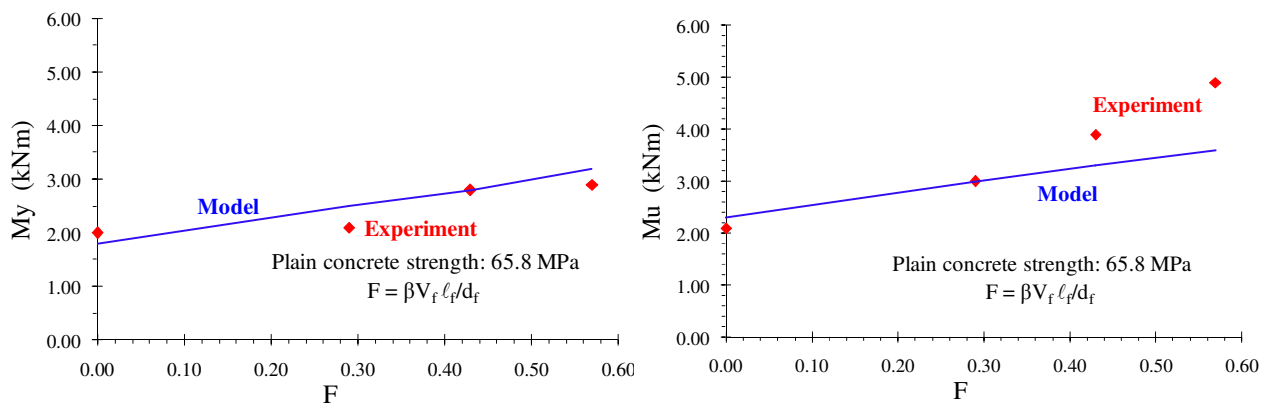
	(α)	(β)	(γ)
Αντοχή άοπλου σκυροδέματος $f_c$ (MPa)	65.8	24.1	33.6
Τάση διαρροής χάλυβα $f_y$ (MPa)	560	550	560
Τάση θραύσης των ινών $f_f$ (MPa)	1200	1200	1200

Πιν. 1 Μηχανικές παράμετροι των υλικών για την κάθε εξεταζόμενη διατομή

Στα Σχ. 9 και 10 παρουσιάζεται η καμπτική συμπεριφορά για την περίπτωση (α) όπου συγκρίνονται τα αποτελέσματα του προτεινόμενου μοντέλου και των πειραμάτων, σε μορφή διαγραμμάτων ροπών - καμπυλοτήτων ( $M - \varphi$ ) και ροπών - συντελεστή  $F$  (στη διαρροή και στην αστοχία).



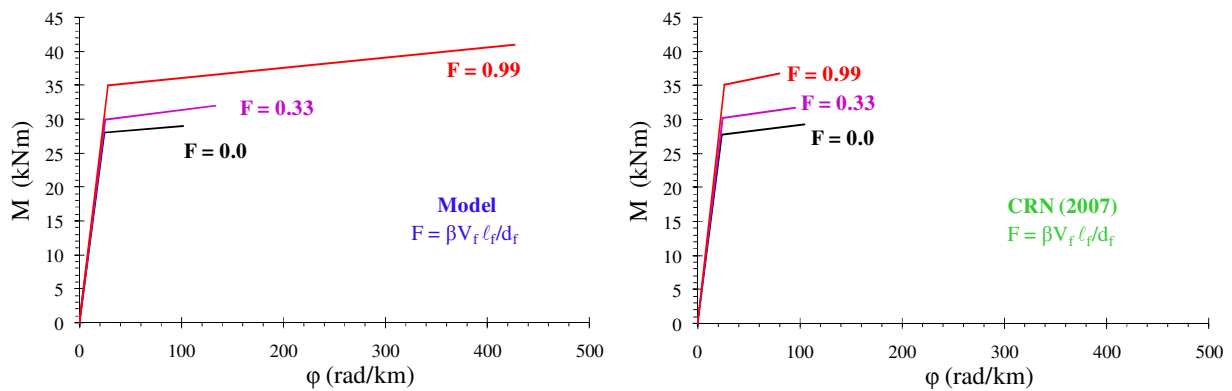
Σχ. 9. Διαγράμματα ροπών - καμπυλοτήτων ( $M - \varphi$ ) του μοντέλου και των πειραματικών δεδομένων για τη διατομή (α) (Barros and Figueiras 1999)



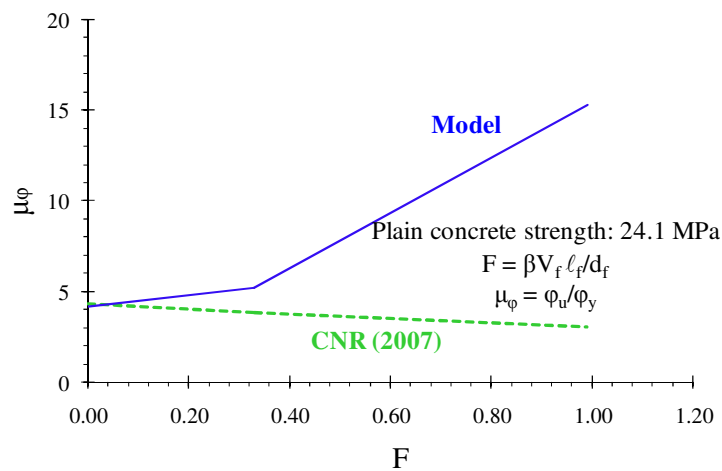
Σχ. 10. Διαγράμματα ροπών - συντελεστή  $F$  στη διαρροή και στην αστοχία ( $M_y - F$ ,  $M_u - F$ ) του μοντέλου και των πειραματικών δεδομένων για την (α) (Barros and Figueiras 1999)

Όπως φαίνεται στο Σχ. 9 για τη διατομή της περίπτωσης (α), η απόκριση που προκύπτει από την ανάλυση (προτεινόμενο μοντέλο) παρουσιάζει μικρές διαφορές με αυτή του πειράματος για την περίπτωση χωρίς ίνες ( $F = 0$ ), ενώ σχεδόν ταυτίζεται στην περίπτωση  $F = 0.29$ . Επίσης οι διαφορές που προκύπτουν μεταξύ των τιμών των ροπών διαρροής και αστοχίας, ανάμεσα στο μοντέλο και τα πειραματικά αποτελέσματα για διάφορες τιμές του συντελεστή  $F$  είναι μικρές, ιδίως δε στην περίπτωση της διαρροής έτσι όπως φαίνεται από τα διαγράμματα του Σχ. 10.

Στο Σχ. 11 συγκρίνονται τα αποτελέσματα του προτεινόμενου μοντέλου κάμψης με τις αντίστοιχες προβλέψεις του Ιταλικού Κανονισμού (CNR 2007) για τη διατομή της περίπτωσης (β) σε μορφή διαγραμμάτων ροπών - καμπυλοτήτων ( $M - \varphi$ ). Όπως προκύπτει από το σχήμα, οι τιμές των ροπών δεν έχουν ουσιαστική διαφορά μεταξύ τους. Όμως, οι τιμές για τις αντίστοιχες καμπυλότητες αστοχίας είναι πολύ διαφορετικές, ιδίως δε στις περιπτώσεις με μεγάλα ποσοστά ινών. Η διαφορά είναι πιο εμφανής και στο Σχ. 12 όπου παρουσιάζεται το διάγραμμα πλαστιμότητας καμπυλοτήτων  $\mu_\varphi$  - συντελεστή  $F$  ( $\mu_\varphi - F$ ) της κάθε ανάλυσης.

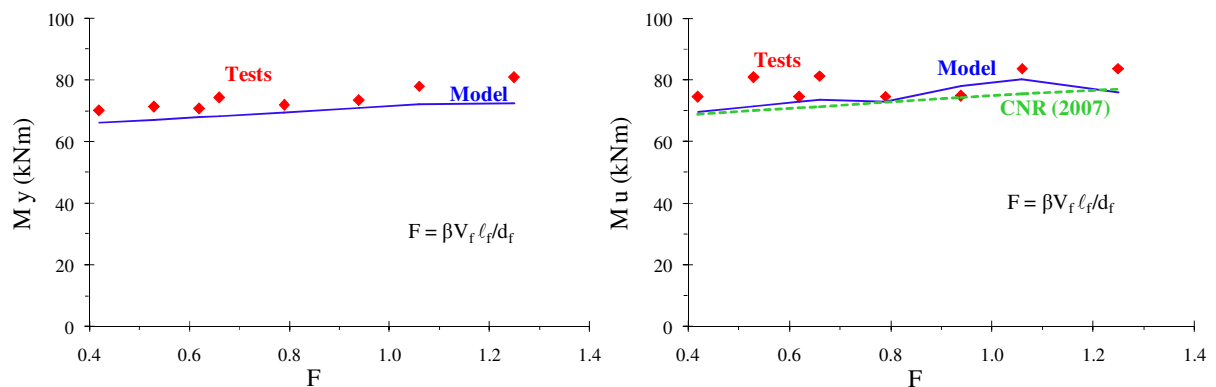


Σχ. 11. Διαγράμματα ροπών - καμπυλοτήτων ( $M - \varphi$ ) του προτεινόμενου μοντέλου και του Ιταλικού Κανονισμού (CNR 2007) για τη διατομή ( $\beta$ )

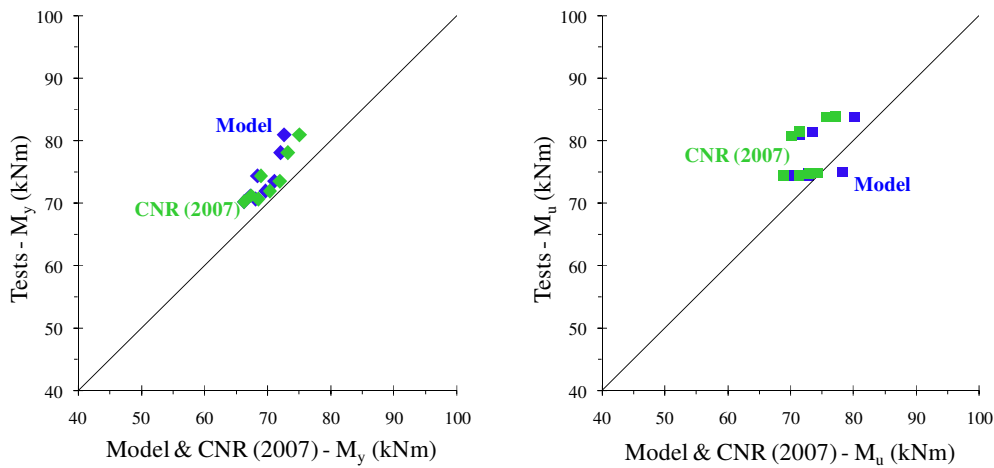


Σχ. 12. Διάγραμμα  $\mu_\varphi - F$  του προτεινόμενου μοντέλου και του Ιταλικού Κανονισμού (CNR 2007) για τη διατομή ( $\beta$ )

Στα Σχ. 13 και 14 που ακολουθούν παρουσιάζονται και αντιπαραβάλλονται τα αποτελέσματα των ροπών διαρροής και αστοχίας των πειραμάτων με εκείνα που προκύπτουν από το προτεινόμενο μοντέλο και τον Ιταλικό Κανονισμό (CNR 2007) για την περίπτωση της διατομής ( $\gamma$ ) (Ζέρης κ.ά. 2009). Είναι εμφανές ότι υπάρχει ιδιαίτερα ικανοποιητική σύγκλιση μεταξύ των αναλυτικών και των πειραματικών αποτελεσμάτων.

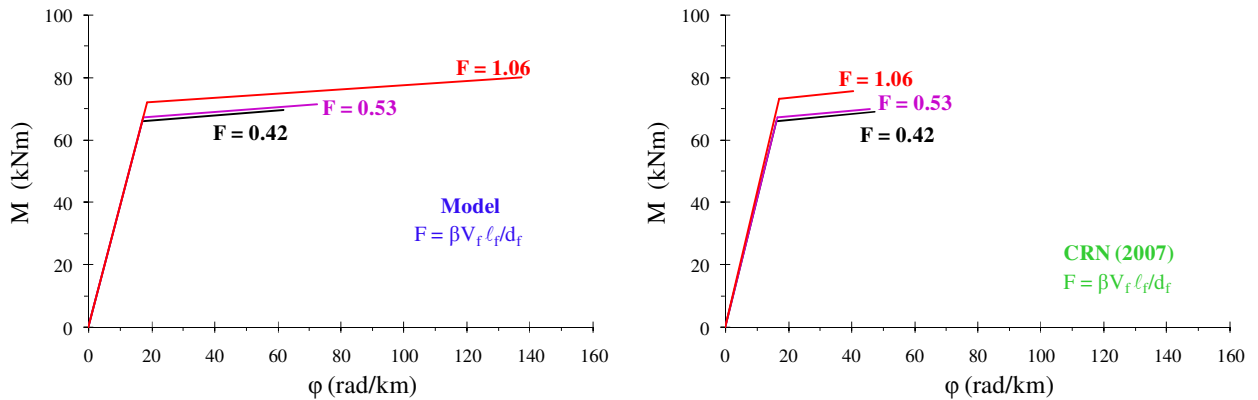


Σχ. 13. Διαγράμματα ροπών - συντελεστή  $F$  ( $M - F$ ) για τη διαρροή και την αστοχία στην περίπτωση της διατομής ( $\gamma$ ) (Ζέρης κ.ά. 2009)

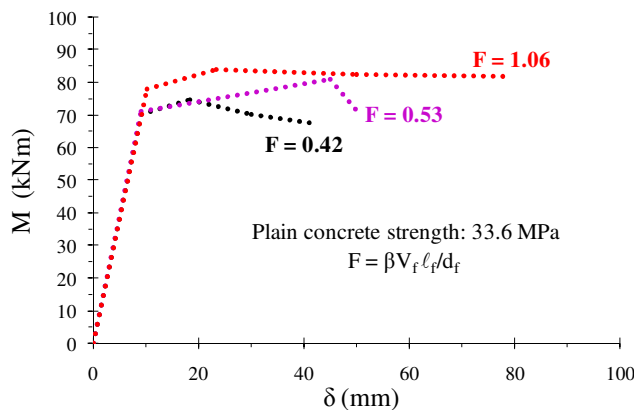


Σχ. 14. Διαγράμματα  $M_{tests} - M$  μεταξύ των πειραμάτων και των αναλύσεων για τη διαρροή και την αστοχία στην περίπτωση της διατομής ( $\gamma$ ) (Ζέρης κ.ά. 2009)

Ωστόσο, η προσέγγιση του προβλήματος με τη χρήση του Ιταλικού Κανονισμού (CNR 2007) οδηγεί σε μείωση της πλαστιμότητας καμπυλοτήτων για αύξηση του ποσοστού των ινών. Αυτό το αποτέλεσμα είναι παραπαιστικό καθότι έρχεται σε αντίθεση με τα πειραματικά αποτελέσματα (Ζέρης κ.ά. 2009), όπως φαίνονται στο Σχ. 16, όπου παρουσιάζεται το διάγραμμα ροπών - μετατοπίσεων ( $M - \delta$ ) για την περίπτωση ( $\gamma$ ). Αντιθέτως, οι σχετικές αναλυτικές καμπύλες του προτεινόμενου μοντέλου συμφωνούν με τις αντίστοιχες πειραματικές.



Σχ. 15. Διαγράμματα ροπών - καμπυλοτήτων ( $M - \phi$ ) του προτεινόμενου μοντέλου και του Ιταλικού Κανονισμού (CNR 2007) για τη διατομή ( $\gamma$ ) (Ζέρης κ.ά. 2009)



Σχ. 16 Διάγραμμα ροπών - μετατοπίσεων ( $M - \delta$ ) για τη διατομή ( $\gamma$ ) (Ζέρης κ.ά. 2009)

## 6. Συμπεράσματα

Στην παρούσα εργασία προτείνονται ένα αναλυτικό προσομοίωμα για την ανάλυση διατομών δομικών στοιχείων από ινοσκυρόδεμα με ή χωρίς διαμήκεις ράβδους υπό καθαρή μονοαξονική κάμψη. Το μοντέλο βασίζεται στις ειδικές βελτιωμένες σχέσεις τάσεων - παραμορφώσεων για το ινοσκυρόδεμα υπό κεντρική θλίψη και υπό άμεσο εφελκυσμό, οι οποίες βασίζονται σε πειραματικά αποτελέσματα ευρείας βάσης δεδομένων. Τα αποτελέσματα της προτεινόμενης μεθοδολογίας συγκρίνονται με αντίστοιχα πειραματικά για δοκούς ινοσκυροδέματος υπό κάμψη από τη Διεθνή και την ελληνική βιβλιογραφία. Ακόμα, γίνεται σύγκριση των αποτελεσμάτων της προτεινόμενης μεθοδολογίας με αυτά που προκύπτουν από τον Ιταλικό Κανονισμό (CNR 2007). Η σύγκλιση των αντοχών (ροπών κάμψης) και των διαγραμμάτων ροπών - καμπυλοτήτων μεταξύ αναλυτικών αποτελεσμάτων και πειραματικών δεδομένων είναι ιδιαίτερα ικανοποιητική.

## Βιβλιογραφία

- Ζέρης, Χ., Βιτάλης, Σ. και Κοντογιάννης, Π. (2009), “Πειραματική Διερεύνηση Δοκών από Ινοπλισμένο Σκυρόδεμα χωρίς Οπλισμό Διάτμησης”, *Πρακτικά 16ου Πανελληνίου Συνεδρίου Σκυροδέματος*, ΤΕΕ, ΕΤΕΚ, Πάφος, Κύπρος.
- Παπαθεοχάρης, Θ., Περδικάρης, Φ.Κ. και Τζάρος, Κ. (2008), “Πειραματική Μελέτη Συμπεριφοράς Δοκών Ινοπλισμένου Σκυροδέματος υπό Στατική Μονοτονική και Ανακυκλιζόμενη Φόρτιση Κάμψης”, 33ο Πανελλήνιο Συνέδριο Αντισεισμικής Μηχανικής & Τεχνικής Σεισμολογίας, Άρθρο 1969.
- Ashour, S.A. and Wafa, F.F. (1993), “Flexural Behaviour of High – Strength Fiber Reinforced Concrete Beams”, *ACI Structural Journal*, Vol. 90, No. 3, pp. 279-287.
- Ashour, S.A., Wafa, F.F., Kamal, M.I. (2000), “Effect of the Concrete Compressive Strength and Tensile Reinforcement ratio on the Flexural Behaviour of Fibrous Concrete Beams”, *Engineering Structures*, Vol. 22, No. 1, pp. 1145-1158.
- Barros, J.A. and Figueiras J.A. (1999), “Flexural Behaviour of SFRC: Testing and Modeling”, *Journal of Materials in Civil Engineering*, Vol. 11, No. 4, pp. 331-339.
- Bentur, A. and Mindess, S. (1990), “Fibre Reinforced Cementitious Composites”, *Elsevier Applied Science*, New York.
- CEN (2004), “Eurocode 2. Design of Concrete Structures – Part 1–1: General Rules and Rules for Buildings (EN 1992-1-1)”, Brussels.
- Chalioris, C.E. and Karayannis, C.G. (2009), “Effectiveness of the Use of Steel Fibres on the Torsional Behaviour of Flanged Concrete Beams”, *Cement and Concrete Composites*, Vol. 31, No.5, pp. 331-341.
- Chalioris, C.E. (2013a), “Analytical Approach for the Evaluation of Minimum Fibre Factor required for Steel Fibrous Concrete Beams under Combined Shear and Flexure”, *Construction and Building Materials*, Vol. 43, pp. 317-336.
- Chalioris, C.E. (2013b), “Steel Fibrous RC Beams subjected to Cyclic Deformations under Predominant Shear”, *Engineering Structures*, Vol. 49, pp.104-118.

- Chalioris, C.E. and Liotoglou, F.A. (2015), “Tests and Simplified Behavioural Model for Steel Fibrous Concrete under Compression”, *Advances in Civil Engineering and Building Materials*, Vol. IV, CRC Press, pp. 195-199.
- CNR (2007), “Guide for the Design and Construction of Fiber-Reinforced Concrete Structures (CNR-DT 204/2006)”, Rome.
- Karayannis, C.G. (2000a), “Nonlinear Analysis and Tests of Steel-Fiber Concrete Beams in Torsion”, *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 9, No. 4, pp. 323-338.
- Karayannis, C.G. (2000b), “Analysis and Experimental Study for Steel Fibre Pullout from Cementitious Matrices”, *Advanced Composites Letters*, Vol. 9, No. 4, pp. 243-255.
- Manolis, G.D. Gareis, P.J. Tsonos, A.-D.G. and Neal, J.A. (1997), “Dynamic Properties of Polypropylene Fiber-Reinforced Concrete Slabs”, *Cement and Concrete Composites*, Vol. 19, No. 4, pp. 341-349.
- Narayanan, R. and Darwish, I.Y.S. (1987), “Use of Steel Fibers as Shear Reinforcement”, *ACI Structural Journal*, Vol. 84, No. 3, pp. 216-227.
- Sorousian, P. and Lee, C.D. (1990), “Distribution and Orientation of Fibers in Steel Fiber Reinforced Concrete”, *ACI Materials J.*, Vol.87, No.4, pp. 433-439.
- Soulioti, D.V., Barkoula, N.M., Paipetis, A. and Matikas T.E. (2011), “Effects of Fibre Geometry and Volume Fraction on the Flexural Behaviour of Steel-Fibre Reinforced Concrete”, *Strain*, Vol. 47, No. 1, pp. 535-541.
- Tegos, I.A. (1989), “Fiber Reinforced Concrete Beams with Circular Section in Torsion”, *Structural Journal*, Vol. 86, No. 4, pp. 473-482.
- Tsonos, A.-D.G. (2009), “Steel Fiber High-Strength Reinforced Concrete: A New Solution for Earthquake Strengthening of Old R/C Structures”, *WIT Transactions of Building Environment*, Vol. 104, pp. 153-164.
- Vougioukas, E. Zeris, C.A. and Kotsovos, M.D. (2005), “Toward Safe and Efficient Use of Fiber - Reinforced Polymer for Repair and Strengthening of Reinforced Concrete Structures”, *ACI Structural Journal*, Vol. 104, No. 4, pp. 525-534.