

Αξιολόγηση μεθοδολογίας Στατικής Υπερωθητικής Ανάλυσης για ασύμμετρα χωρικά συστήματα

Γρηγόριος Μανούκας

Δρ. Πολιτικός Μηχανικός ΑΠΘ, grman7@otenet.gr

Εισαγωγή

Τα τελευταία χρόνια υπάρχει αυξημένο ενδιαφέρον τόσο των ερευνητών, όσο και των μηχανικών της πράξης για τη διενέργεια ανελαστικών αναλύσεων στα πλαίσια του αντισεισμικού σχεδιασμού κατασκευών. Η μη γραμμική δυναμική μέθοδος, η οποία αποτελεί το ακριβέστερο εργαλείο για τέτοιου είδους αναλύσεις, παρουσιάζει - πέραν του πολύ μεγάλου υπολογιστικού κόστους - μία σειρά δυσκολιών που καθιστούν την εφαρμογή της στη συμβατική δομική πράξη προβληματική. Για το λόγο αυτό καταβλήθηκαν και συνεχίζουν να καταβάλλονται πολλές προσπάθειες για την εύρεση απλοποιημένων μεθόδων προσεγγιστικού υπολογισμού της ανελαστικής συμπεριφοράς κατασκευών. Καρπός αυτών των προσπαθειών υπήρξε η ανάπτυξη σε διάφορες παραλλαγές της Στατικής Υπερωθητικής Ανάλυσης (ΣΥΑ) ή Pushover Analysis, η οποία υιοθετήθηκε από διεθνή κανονιστικά ή προκανονιστικά κείμενα και εφαρμόζεται ευρέως στην πράξη.

Παρόλα αυτά, έχει εγκαίρως επισημανθεί από πολλούς ερευνητές ότι η ΣΥΑ στερείται θεωρητικής βάσης και δεν παρέχει πάντα ικανοποιητική ακρίβεια, ιδιαίτερα μάλιστα στην περίπτωση εφαρμογής της σε ασύμμετρα χωρικά συστήματα. Ένας από τους παράγοντες που εισάγουν πρόσθετα σφάλματα σε αυτή την περίπτωση είναι η χρήση απλοποιητικών κανόνων χωρικής επαλληλίας (SRSS ή ποσοστιαίοι συνδυασμοί) για τη συνεκτίμηση της ταυτόχρονης σεισμικής διέγερσης σε δύο διευθύνσεις, ενώ είναι γνωστό ότι στην ανελαστική περιοχή συμπεριφοράς δεν ισχύει η αρχή της επαλληλίας. Με στόχο την άρση της παραπάνω αδυναμίας, προτάθηκε μια πολύ-ιδιομορφική παραλλαγή της ΣΥΑ που εισάγει μια νέα τεχνική για τη συνεκτίμηση της ταυτόχρονης δράσης των δύο οριζόντιων σεισμικών συνιστωσών, με κατάλληλη τροποποίηση των ιδιοτήτων του ισοδύναμου μονοβάθμιου συστήματος. Με την τεχνική αυτή αποφεύγεται η χρήση απλοποιητικών κανόνων χωρικής επαλληλίας, καθώς δεν απαιτείται ανεξάρτητη ανάλυση του φορέα για κάθε διεύθυνση σεισμικής διέγερσης. Η ανάλυση διεξάγεται για διάφορους συνδυασμούς των δύο οριζόντιων σεισμικών συνιστωσών με στόχο την περιβολή της ακριβούς απόκρισης. Η εν λόγω παραλλαγή της ΣΥΑ ελέγχθηκε μέσω πληθώρας εφαρμογών που κατέδειξαν την αξιοπιστία της, σε σύγκριση και με άλλες παρόμοιες μεθοδολογίες (π.χ. Manoukas et al. 2012, Manoukas and Avramidis 2014).

Ωστόσο, η προταθείσα μεθοδολογία δεν αποδείχθηκε το ίδιο αποτελεσματική για όλα τα μεγέθη απόκρισης. Πιο συγκεκριμένα, παρατηρήθηκε σε κάποιες περιπτώσεις μειωμένη ακρίβεια στον προσδιορισμό των μεγεθών απόκρισης στη δύσκαμπτη πλευρά ασύμμετρων κτιρίων. Για την αντιμετώπιση αυτού του φαινομένου, που παρατηρείται στο σύνολο σχεδόν των παραλλαγών της ΣΥΑ, πρόσφατα αναπτύχθηκε μια βελτιωμένη εκδοχή της μεθοδολογίας (Manoukas and Avramidis 2015). Η βελτίωση συνίσταται στη διόρθωση των μεγεθών απόκρισης της δύσκαμπτης πλευράς με τη χρήση τροποποιητικών συντελεστών που προκύπτουν από ιδιομορφική ανάλυση.

Αντικείμενο της παρούσας εργασίας είναι η περαιτέρω αξιολόγηση της βελτιωμένης αυτής μεθοδολογίας μέσα από μια σειρά εφαρμογών σε ασύμμετρα πολυώροφα κτίρια από οπλισμένο σκυρόδεμα. Αρχικά, γίνεται μια συνοπτική αναφορά στο θεωρητικό υπόβαθρο και τα διαδοχικά

βήματα που απαιτούνται για την εφαρμογή της, με ιδιαίτερη έμφαση στον υπολογισμό των διορθωτικών συντελεστών. Κατόπιν, παρουσιάζονται οι εκτελεσθείσες εφαρμογές που περιλαμβάνουν ανάλυση των κτιρίων i) με τη βελτιωμένη εκδοχή της προταθείσας μεθοδολογίας (IPM – Improved Proposed Methodology), ii) με την αρχική εκδοχή της προταθείσας μεθοδολογίας (PM – Proposed Methodology), iii) με μια ‘συμβατική’ πολύ-ιδιομορφική παραλλαγή της ΣΥΑ που στηρίζεται στη χρήση απλοποιημένων κανόνων χωρικής επαλληλίας (CP – Conventional Procedure) και iv) με τη θεωρητικά ακριβή μη γραμμική δυναμική ανάλυση που χρησιμεύει ως λύση αναφοράς. Αποδεικνύεται ότι στις περισσότερες περιπτώσεις η βελτιωμένη εκδοχή της προτεινόμενης μεθοδολογίας περιβάλλει τα αποτελέσματα της ανελαστικής δυναμικής ανάλυσης, ενώ σε γενικές γραμμές είναι πιο ακριβής από τη ‘συμβατική’ μεθοδολογία.

Θεωρητικό υπόβαθρο

Η προτεινόμενη μεθοδολογία βασίζεται καταρχάς σε μια σειρά αναπόφευκτων παραδοχών που είναι κοινές σε όλες σχεδόν τις πολύ-ιδιομορφικές παραλλαγές της ΣΥΑ. Οι παραδοχές αυτές είναι οι εξής:

- Η ανελαστική απόκριση ενός πολυβάθμιου συστήματος μπορεί να αναλυθεί, όπως ακριβώς και στην ελαστική περιοχή, σε επαλληλία αποκρίσεων ανεξάρτητων μονοβάθμιων συστημάτων, κάθε ένα από τα οποία αντιστοιχεί σε μια «ιδιομορφή» (η χρήση των εισαγωγικών καταδεικνύει ακριβώς την καταχρηστική χρήση του όρου ιδιομορφή για την ανελαστική περιοχή συμπεριφοράς).
- Το μητρώο \mathbf{u}_i των «ιδιομορφικών» μετακινήσεων κάθε «ιδιομορφής» i θεωρείται ανάλογο με το ιδιοδιάνυσμα $\boldsymbol{\varphi}_i$ της υπόψη ελαστικής ιδιομορφής.
- Το μητρώο \mathbf{F}_{si} των «ιδιομορφικών» δυνάμεων κάθε «ιδιομορφής» i θεωρείται ανάλογο με το γινόμενο του μητρώου μάζας \mathbf{M} του συστήματος επί το ιδιοδιάνυσμα $\boldsymbol{\varphi}_i$ της υπόψη ελαστικής ιδιομορφής.
- Τα ιδιοδιανύσματα $\boldsymbol{\varphi}_i$ θεωρείται ότι παραμένουν αμετάβλητα παρά τη διαδοχική εμφάνιση πλαστικών αρθρώσεων στις διατομές του συστήματος.
- Υποτίθεται ύπαρξη γραμμικής ιξώδους απόσβεσης τύπου Rayleigh.

Η μόνη επιπλέον παραδοχή είναι ότι οι δύο οριζόντιες σεισμικές συνιστώσες \ddot{u}_{gX} , \ddot{u}_{gY} κατά τους άξονες X και Y αντίστοιχα είναι μεταξύ τους ανάλογες, με ένα σταθερό συντελεστή αναλογίας κ , δηλαδή:

$$\ddot{u}_{gY} = \kappa \ddot{u}_{gX} = \kappa \ddot{u}_g \quad (1)$$

Βέβαια, κάτι τέτοιο δεν ισχύει στην πραγματικότητα. Ωστόσο, η προσέγγιση αυτή είναι συμβατή με τη συνήθη παραδοχή των αντισεισμικών κανονισμών, που καθορίζουν ότι οι δύο οριζόντιες σεισμικές συνιστώσες αντιπροσωπεύονται από το ίδιο φάσμα σχεδιασμού, ενώ τα τελικά μεγέθη απόκρισης επιτρέπεται να υπολογίζονται με τη χρήση του απλοποιητικού κανόνα των ποσοστιαίων συνδυασμών που εμπεριέχει ένα σταθερό συντελεστή (0.3) παρόμοιο με τον κ . Προφανώς, η αξιολόγηση αυτής της παραδοχής, καθώς και ο καθορισμός συγκεκριμένων τιμών για τον συντελεστή κ εκφεύγει του αντικείμενου της παρούσας εργασίας.

Με βάση τις παραπάνω παραδοχές, η μη γραμμική απόκριση ενός συστήματος Λ ορόφων και N βαθμών ελευθερίας (στη συνήθη περίπτωση κτιρίων με διαφραγματική λειτουργία στις στάθμες των

ορόφων ισχύει κατά κανόνα $N = 3\Lambda$) που υποβάλλεται σε διαξονική σεισμική διέγερση περιγράφεται από το παρακάτω σύστημα εξισώσεων (Manoukas et al. 2012, Manoukas and Avramidis 2014):

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{F}_s = -\mathbf{M}(\delta_{,x} + \kappa\delta_{,y})\ddot{u}_g \Rightarrow \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{F}_s = -\mathbf{M}\delta_{,xy}\ddot{u}_g \quad (2)$$

όπου, κατά τα γνωστά, $\dot{\mathbf{u}}$, $\ddot{\mathbf{u}}$ τα $N \times 1$ διανύσματα ταχυτήτων και επιταχύνσεων των βαθμών ελευθερίας, \mathbf{M} το $N \times N$ διαγώνιο μητρώο μάζας, \mathbf{C} το $N \times N$ συμμετρικό μητρώο απόσβεσης, $\delta_{,x}$ και $\delta_{,y}$ τα διανύσματα των στερεοστατικών μετακινήσεων για μονοαξονική διέγερση κατά X και Y αντίστοιχα και \mathbf{F}_s το $N \times 1$ διάνυσμα των ανελαστικών δυνάμεων επαναφοράς. Αν θεωρηθεί ότι το $N \times 1$ διάνυσμα μετακινήσεων των βαθμών ελευθερίας \mathbf{u} έχει τη μορφή:

$$\mathbf{u} = [\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \boldsymbol{\theta}_z]^T \quad (3)$$

όπου \mathbf{u}_x , \mathbf{u}_y , $\boldsymbol{\theta}_z$ τα $\Lambda \times 1$ διανύσματα των μετατοπίσεων κατά X και Y και των στροφών περί τον κατακόρυφο άξονα Z , τότε τα $\delta_{,x}$ και $\delta_{,y}$ γράφονται:

$$\delta_{,x} = [\mathbf{I}, \mathbf{0}, \mathbf{0}]^T \quad (4\alpha)$$

$$\delta_{,y} = [\mathbf{0}, \mathbf{I}, \mathbf{0}]^T \quad (4\beta)$$

όπου \mathbf{I} , $\mathbf{0}$ $\Lambda \times 1$ διανύσματα με στοιχεία ίσα με 1 και 0 αντίστοιχα. Χάρη στις παραπάνω παραδοχές, τόσο το διάνυσμα των μετακινήσεων \mathbf{u} , όσο και το διάνυσμα των δυνάμεων επαναφοράς \mathbf{F}_s μπορούν να αναλυθούν σε «ιδιομορφικές» συνιστώσες:

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^N \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^N \boldsymbol{\varphi}_i q_i \quad (5\alpha)$$

$$\mathbf{F}_s = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_{s_i} = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbf{M}\boldsymbol{\varphi}_i \quad (5\beta)$$

όπου α_i είναι, κατά τα γνωστά, μια υστερητικού τύπου συνάρτηση που εξαρτάται από την κύρια ιδιομορφική συντεταγμένη q_i και την ιστορία της φόρτισης. Ξεκινώντας από την εξίσωση (2) και κάνοντας χρήση των παραπάνω σχέσεων καταλήγουμε μετά από απλές πράξεις σε N ανεξάρτητες εξισώσεις, καθεμιά από τις οποίες αντιστοιχεί σε ένα «ιδιομορφικό» ισοδύναμο μονοβάθμιο σύστημα (Manoukas et al. 2012, Manoukas and Avramidis 2014):

$$M_{XYi}^* \ddot{D}_i + 2 M_{XYi}^* \omega_i \zeta_i \dot{D}_i + V_{XYi} = -M_{XYi}^* \ddot{u}_g \quad (6)$$

όπου $D_i = q_i / v_{XYi}$, \dot{D}_i , \ddot{D}_i , η μετακίνηση, ταχύτητα και επιτάχυνση του i -στού ισοδύναμου μονοβάθμιου συστήματος, ω_i και ζ_i η κυκλική ιδιοσυχνότητα και το ποσοστό απόσβεσης της αντίστοιχης ελαστικής ιδιομορφής i και:

$$V_{XYi} = V_{Xi} + \kappa V_{Yi} \quad (7\alpha)$$

$$M_{XYi}^* = M_{Xi}^* + \kappa(v_{Xi} L_{Yi} + v_{Yi} L_{Xi}) + \kappa^2 M_{Yi}^* \quad (7\beta)$$

$$V_{XYi} = V_{Xi} + \kappa V_{Yi} \quad (7\gamma)$$

όπου V_{Xi} , V_{Yi} οι «ιδιομορφικές» τέμνουσες βάσης κατά X και Y αντίστοιχα, M_{Xi}^* , M_{Yi}^* και v_{Xi} , v_{Yi} οι «ιδιομορφικές» δρώσες μάζες και οι συντελεστές συμμετοχής της «ιδιομορφής» i για μονοαξονική διέγερση κατά X και Y αντίστοιχα, ενώ $L_{Xi} = \delta_{,X}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_i$ και $L_{Yi} = \delta_{,Y}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_i$. Από την εξίσωση (6) συνάγεται το συμπέρασμα ότι η μη γραμμική απόκριση ενός N -βάθμιου συστήματος που υποβάλλεται ταυτόχρονα σε διεγέρσεις \ddot{u}_{gX} και $\ddot{u}_{gY} = \kappa \ddot{u}_{gX} = \kappa \ddot{u}_g$ κατά X και Y αντίστοιχα - λόγω των παραδοχών που προαναφέρθηκαν - μπορεί να προκύψει με επαλληλία των αποκρίσεων N μονοβάθμιων συστημάτων που υποβάλλονται σε διέγερση \ddot{u}_g . Καθένα από τα μονοβάθμια συστήματα αντιστοιχεί σε μια «ιδιομορφή» i , έχει μάζα ίση με M_{XYi}^* , μετακίνηση D_i και μη γραμμική δύναμη επαναφοράς ίση με την ποσότητα V_{XYi} . Η V_{XYi} ταυτίζεται με το άθροισμα της «ιδιομορφικής» τέμνουσας βάσης κατά X και της «ιδιομορφικής» τέμνουσας βάσης κατά Y πολλαπλασιασμένης με κ . Το συμπέρασμα αυτό επιτρέπει τον υπολογισμό των ιδιοτήτων του ισοδύναμου μονοβάθμιου συστήματος κάθε «ιδιομορφής» i για διαξονική σεισμική διέγερση από τις εξισώσεις που συνοψίζονται στον Πίνακα 1. Στον ίδιο πίνακα δίνονται για λόγους σύγκρισης και οι αντίστοιχες εξισώσεις για μονοαξονική διέγερση (ενδεικτικά κατά X), οι οποίες χρησιμοποιούνται από τις γνωστές μέχρι σήμερα πολύ-ιδιομορφικές παραλλαγές της ΣΥΑ.

Πίνακας 1 Ιδιότητες ισοδύναμου μονοβάθμιου συστήματος «ιδιομορφής» i

Ιδιότητα	Μονοαξονική διέγερση \ddot{u}_{gX}	Διαξονική διέγερση $\ddot{u}_{gX} + \kappa \ddot{u}_{gY}$
Μάζα	M_{Xi}^*	$M_{XYi}^* = M_{Xi}^* + \kappa(v_{Xi} L_{Yi} + v_{Yi} L_{Xi}) + \kappa^2 M_{Yi}^*$
Δύναμη επαναφοράς	V_{Xi}	$V_{XYi} = V_{Xi} + \kappa V_{Yi}$
Μετακίνηση	$D_i = u_{Ni} / v_{Xi} \phi_{Ni}$ (μετακίνηση κορυφής u_{Ni})	$D_i = u_{Ni} / v_{XYi} \phi_{Ni} = u_{Ni} / (v_{Xi} + \kappa v_{Yi}) \phi_{Ni}$ (μετακίνηση κορυφής u_{Ni})
Συντελεστής απόσβεσης	$2 M_{Xi}^* \omega_{\zeta i}$	$2 M_{XYi}^* \omega_{\zeta i}$

Διορθωτικοί συντελεστές απόκρισης της δύσκαμπτης πλευράς

Από τις πρώτες εφαρμογές της προτεινόμενης μεθοδολογίας διαπιστώθηκε ότι σε κάποιες περιπτώσεις αποτυγχάνει να παράσχει αξιόπιστες εκτιμήσεις των μεγεθών απόκρισης στην δύσκαμπτη πλευρά υψηλών ασύμμετρων κτιρίων με σχετικά χαμηλή δυστρεψία. Προφανώς, το φαινόμενο αυτό οφείλεται στην επιρροή της στρέψης. Παρόμοιες διαπιστώσεις έγιναν στο παρελθόν κατά την εφαρμογή και άλλων παραλλαγών της ΣΥΑ και προτάθηκαν διάφορες τροποποιήσεις.

Οι Fajfar et al. (Fajfar et al. 2005) πρότειναν την εφαρμογή διορθωτικών συντελεστών με τους οποίους πολλαπλασιάζονται τα μεγέθη απόκρισης που προκύπτουν από τη ΣΥΑ. Ο διορθωτικός συντελεστής σε οποιαδήποτε θέση της κάτοψης ισούται με το λόγο των κανονικοποιημένων μετακινήσεων οροφής που προκύπτουν από ιδιομορφική και από την υπερωθητική ανάλυση. Η κανονικοποιημένη μετακίνηση οροφής ορίζεται ως ο λόγος της μετακίνησης οροφής στη συγκεκριμένη θέση προς την αντίστοιχη μετακίνηση οροφής στο κέντρο βάρους της κάτοψης. Η κανονικοποιημένη μετακίνηση που προκύπτει από την ιδιομορφική ανάλυση λαμβάνεται πάντα

μεγαλύτερη ή ίση του 1. Με άλλα λόγια, η μετακίνηση του κέντρου βάρους της οροφής θεωρείται κάτω όριο των μετακινήσεων σε οποιοδήποτε σημείο της οροφής. Κατά συνέπεια, μείωση των μετακινήσεων λόγω στρέψης δεν λαμβάνεται υπόψη.

Στην παρούσα εργασία ακολουθείται μια παρόμοια προσέγγιση που περιλαμβάνει διορθωτικούς συντελεστές με τους οποίους πολλαπλασιάζονται τα μεγέθη απόκρισης στη δύσκαμπτη πλευρά των κτιρίων. Οι διορθωτικοί συντελεστές υπολογίζονται για κάθε ιδιομορφή, για κάθε όροφο και για κάθε μέγεθος απόκρισης ξεχωριστά, μέσω ελαστικής ιδιομορφικής ανάλυσης (που ούτως ή άλλως απαιτείται για την εφαρμογή της προτεινόμενης μεθοδολογίας). Ειδικότερα, η «ιδιομορφική» τιμή ενός μεγέθους απόκρισης R_i (που αντιστοιχεί στην «ιδιομορφή» i) που προκύπτει από την υπερωθητική ανάλυση πολλαπλασιάζεται με ένα συντελεστή f_{Ri} που δίνεται από την παρακάτω εξίσωση:

$$f_{Ri} = \max \{1, r_{\Phi i} / r_{Pi}\} \quad (8)$$

όπου $r_{\Phi i}$, r_{Pi} είναι οι λόγοι κάθε μεγέθους απόκρισης (μετακίνησης ή γωνιακής παραμόρφωσης ορόφου) στη δύσκαμπτη πλευρά προς το αντίστοιχο μέγεθος στο κέντρο βάρους της κάτοψης κάθε ορόφου για την «ιδιομορφή» i , όπως αυτά προκύπτουν από την ιδιομορφική και την υπερωθητική ανάλυση αντίστοιχα. Προκειμένου να αποφευχθεί απομείωση μετακινήσεων λόγω στρέψης, ο λόγος $r_{\Phi i}$ λαμβάνεται πάντα μεγαλύτερος ή ίσος του 1. Οι διορθωτικοί συντελεστές που υπολογίζονται για τις γωνιακές παραμορφώσεις των ορόφων μπορούν ευλόγως να χρησιμοποιούνται και για τις πλαστικές στροφές των διατομών, καθώς υφίσταται άμεση συσχέτιση μεταξύ των δύο αυτών μεγεθών απόκρισης.

Αλληλουχία βημάτων προτεινόμενης μεθοδολογίας

Η προτεινόμενη μεθοδολογία θα πρέπει να εφαρμοστεί για όλους τους πιθανούς συνδυασμούς των δύο οριζόντιων συνιστωσών της σεισμικής διέγερσης. Συνολικά απαιτείται να εξεταστούν οι εξής τέσσερις περιπτώσεις:

$$\ddot{u}_{gX} + \kappa \ddot{u}_{gY} \quad (9\alpha)$$

$$\ddot{u}_{gX} - \kappa \ddot{u}_{gY} \quad (9\beta)$$

$$\ddot{u}_{gY} + \kappa \ddot{u}_{gX} \quad (9\gamma)$$

$$\ddot{u}_{gY} - \kappa \ddot{u}_{gX} \quad (9\delta)$$

Η θεώρηση των τεσσάρων παραπάνω συνδυασμών με αντίθετα πρόσημα αποδεικνύεται - με απλή εφαρμογή της διαδικασίας - ότι οδηγεί σε ταυτόσημα αποτελέσματα.

Μετά την ενσωμάτωση της διορθωτικής διαδικασίας της προηγούμενης παραγράφου, τα διαδοχικά βήματα εφαρμογής της βελτιωμένης πλέον εκδοχής της προτεινόμενης μεθοδολογίας έχουν εν συντομία ως εξής:

Βήμα 1: Μόρφωση του τρισδιάστατου προσομοιώματος του εξεταζόμενου φορέα.

Βήμα 2: Υπολογισμός των ποσοτήτων v_{XY1} και M_{XY1}^* , της 1^{ης} ελαστικής ιδιομορφής για τον πρώτο συνδυασμό των δύο οριζόντιων συνιστωσών της σεισμικής διέγερσης (έστω $\ddot{u}_{gX} + \kappa \ddot{u}_{gY}$).

Βήμα 3: Επιβολή στο προσομοίωμα οριζόντιας επαυξητικής φόρτισης με κατανομή ανάλογη με το διάνυσμα $\mathbf{M}\boldsymbol{\Phi}_1$ της 1^{ης} ελαστικής ιδιομορφής και χάραξη του διαγράμματος τέμνουσας βάσης-μετακίνησης του πολυβάθμιου συστήματος $V_{XY1}-u_{N1}$. Η μετακίνηση u_{N1} θα μπορούσε να αντιστοιχεί σε οποιονδήποτε βαθμό ελευθερίας, αλλά συμβατικά λαμβάνεται ως u_{N1} η μετακίνηση του Κ.Β. του ανώτατου ορόφου (μετακίνηση κορυφής).

Βήμα 4: Διάρθρωση των τετμημένων του διαγράμματος $V_{XY1}-u_{N1}$ με την ποσότητα $v_{XY1}\Phi_{N1} = u_{N1}/D_1$ και προσδιορισμός του διαγράμματος δύναμης επαναφοράς – μετακίνησης $V_{XY1}-D_1$ του ισοδύναμου μονοβάθμιου συστήματος που αντιστοιχεί στην 1^η ιδιομορφή.

Βήμα 5: Εξιδανίκευση του διαγράμματος $V_{XY1}-D_1$ σε μια διγραμμική καμπύλη με κάποια από τις γνωστές τεχνικές που υπάρχουν στους κανονισμούς ή οποιαδήποτε άλλη αποδεκτή μεθοδολογία και υπολογισμός της ιδιοπεριόδου T_1 και του απαιτούμενου συντελεστή συμπεριφοράς R_1 του ισοδύναμου μονοβάθμιου συστήματος που αντιστοιχεί στην 1^η ιδιομορφή από τις παρακάτω εξισώσεις:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 D_{y1}}{V_{y1}}} \rightarrow S_{a1}(T) \rightarrow R_1 = \frac{m_1 S_a(T)}{V_{y1}} \quad (10)$$

όπου $m_1 = M_{XY1}^*$, D_{y1} , V_{y1} είναι η μάζα, η μετακίνηση διαρροής και η αντοχή διαρροής του συστήματος αντίστοιχα και $S_{a1}(T)$ η φασματική επιτάχυνση.

Βήμα 6: Υπολογισμός της στοχευόμενης μετακίνησης που αντιστοιχεί στην 1^η ιδιομορφή με εφαρμογή κάποιας από τις γνωστές σχέσεις των κανονισμών ή οποιασδήποτε άλλης αποδεκτής σχέσης για το ελαστικό φάσμα της θεωρούμενης σεισμικής διέγερσης ή με διενέργεια μη γραμμικής δυναμικής ανάλυσης του ισοδύναμου μονοβάθμιου συστήματος.

Βήμα 7: Εκ νέου διεξαγωγή υπερωθητικής ανάλυσης για οριζόντια επαυξητική φόρτιση με κατανομή ανάλογη με το διάνυσμα $\mathbf{M}\boldsymbol{\Phi}_1$ μέχρι η μετακίνηση κορυφής να φτάσει τη μετακίνηση-στόχο που υπολογίστηκε στο προηγούμενο βήμα και καταγραφή των απαιτούμενων εντασιακών και παραμορφωσιακών μεγεθών που αντιστοιχούν στην ιδιομορφή 1.

Βήμα 8: Πολλαπλασιασμός των «ιδιομορφικών» τιμών των μεγεθών απόκρισης στη δύσκαμπτη πλευρά με τους διορθωτικούς συντελεστές f_{R1} της 1^{ης} ιδιομορφής (εξίσωση (8)).

Βήμα 9: Επανάληψη των βημάτων 3 έως 8 για αντίθετη φορά εφαρμογής των οριζόντιων φορτίων, δηλαδή για κατανομή ανάλογη του $-\mathbf{M}\boldsymbol{\Phi}_1$. Έτσι, για κάθε ιδιομορφή που λαμβάνεται υπόψη, απαιτούνται 2 υπερωθητικές αναλύσεις, υπολογίζονται 2 στοχευόμενες μετακινήσεις και 2 τιμές των εντασιακών και παραμορφωσιακών μεγεθών (με πρόσημο).

Βήμα 10: Επανάληψη των βημάτων 2 έως 9 για επαρκή αριθμό ιδιομορφών. Στη γενική περίπτωση ασύμμετρων συστημάτων (επίπεδων ή χωρικών), αν ληφθούν υπόψη n ιδιομορφές, απαιτούνται συνολικά $2n$ υπερωθητικές αναλύσεις, υπολογίζονται $2n$ μετακινήσεις-στόχοι και $2n$ τιμές των εντασιακών και παραμορφωσιακών μεγεθών (με πρόσημο).

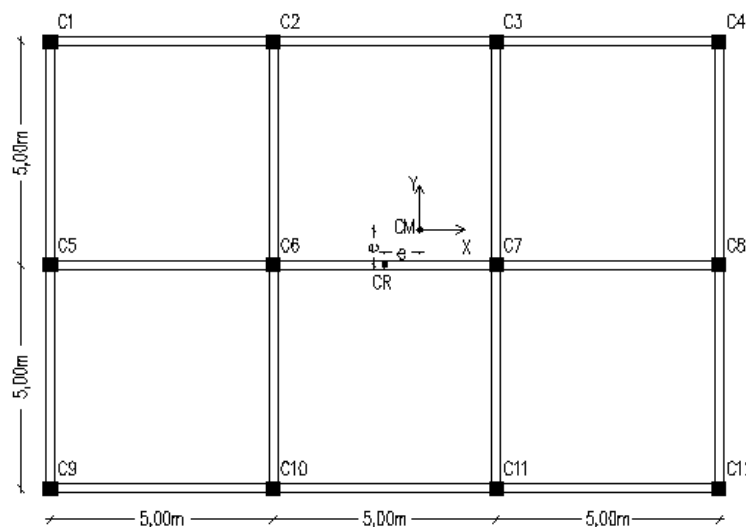
Βήμα 11: Υπολογισμός των ακραίων τιμών των μεγεθών απόκρισης με την εφαρμογή κάποιου από τους γνωστούς κανόνες ιδιομορφικής επαλληλίας (SRSS ή CQC), αφού βάσει των αρχικών παραδοχών διατηρείται η ανεξαρτησία των «ιδιομορφικών» αποκρίσεων όπως αυτή ισχύει στη γραμμική περιοχή. Στη γενική περίπτωση ασύμμετρων συστημάτων (επίπεδων ή χωρικών), αν

ληφθούν υπόψη η ιδιομορφές, προκύπτουν συνολικά 2^η συνδυασμοί τιμών των εντασιακών και παραμορφωσιακών μεγεθών (χωρίς πρόσημο).

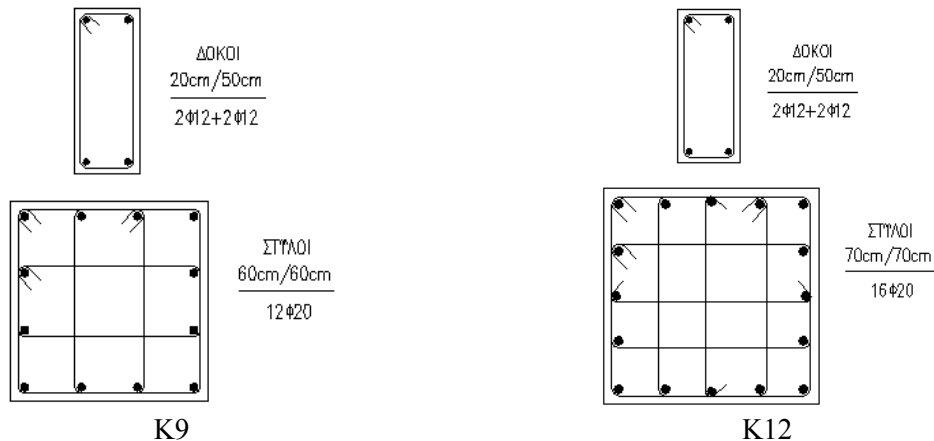
Βήμα 12: Επανάληψη των βημάτων 2 έως 11 για όλους τους πιθανούς συνδυασμούς των δύο οριζόντιων συνιστωσών της σεισμικής διέγερσης (εξισώσεις (9)).

Εφαρμογές

Στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας, αναλύονται δύο κτίρια οπλισμένου σκυροδέματος, ένα εννιάωροφο (K9) και ένα δωδεκαώροφο (K12). Τα κτίρια είναι κανονικά καθ' ύψος, αλλά ασύμμετρα σε κάτοψη (Σχ. 1), με ανηγμένη εκκεντρότητα $e/r = e_x/r = e_y/r = 0.50$, όπου e_x , e_y οι αποστάσεις του κέντρου βάρους της κάτοψης CM (Center of Mass) από το «κέντρο δυσκαμψίας» CR (Center of Rigidity) κατά τους άξονες X και Y αντίστοιχα και r η ακτίνα αδράνειας. Το δομικό τους σύστημα αποτελείται από αμιγή πλαίσια σε κανονικό κάρναβο με μήκος ανοίγματος 5m και ύψος ορόφου 3m. Το σκυρόδεμα είναι κατηγορίας C16/20 ($f_{ck}=16$ MPa) και ο χάλυβας οπλισμού B500C ($f_{yk}=500$ MPa). Οι διαστάσεις και οι οπλισμοί των διατομών των δομικών στοιχείων παραμένουν σταθερές καθ' ύψος (Σχ. 2). Κάθε όροφος έχει μάζα ίση με 150 t και μαζική ροπή αδράνειας ίση με 4062.5 tm².



Σχ. 1 Κάτοψη κτιρίων



Σχ. 2 Διατομές υποστυλωμάτων και δοκών

Όλες οι αναλύσεις γίνονται με το πρόγραμμα SAP 2000. Η προσομοίωση της ανελαστικής συμπεριφοράς των κτιρίων στηρίζεται στις παρακάτω παραδοχές:

- Η διατμητική αστοχία αποκλείεται.
- Οι ανελαστικές παραμορφώσεις θεωρούνται συγκεντρωμένες στις κρίσιμες περιοχές των δομικών στοιχείων, δηλαδή στα άκρα δοκών και υποστυλωμάτων (πλαστικές αρθρώσεις).
- Η προσομοίωση των πλαστικών αρθρώσεων γίνεται μέσω διγραμμικών ελαστικών - απολύτως πλαστικών διαγραμμμάτων ροπών - στροφών διατομής $M-\theta$, με πρακτικά απεριόριστη διαθέσιμη πλαστική στρόφη θ_R και ροπή διαρροής υπολογιζόμενη αυτομάτως από το SAP 2000.
- Η αλληλεπίδραση ροπής - αξονικής δύναμης στα υποστυλώματα λαμβάνεται υπόψη με την καμπύλη αλληλεπίδρασης του ACI 318-02 που είναι ενσωματωμένη στο πρόγραμμα.

Η ανάλυση των κτιρίων γίνεται για 12 σεισμικές διεγέρσεις που καταγράφηκαν στον ελληνικό χώρο (Πίνακας 2). Τα επιταχυνσιογραφήματα με σχετικά χαμηλή εδαφική επιτάχυνση (3, 4, 9 και 11) πολλαπλασιάζονται με ένα συντελεστή ίσο με 1.5. Έτσι, τα κτίρια υπόκεινται σε εκτεταμένες ανελαστικές παραμορφώσεις για το σύνολο των σεισμικών διεγέρσεων. Θεωρείται ότι κάθε επιταχυνσιογράφημα δρα ταυτόχρονα κατά τις δύο οριζόντιες διευθύνσεις με την ίδια ένταση.

Για όλα τα κτίρια διενεργούνται τέσσερις σειρές αναλύσεων:

- Μία σύμφωνα με την προτεινόμενη μεθοδολογία, όπως αυτή αναπτύχθηκε αρχικά (Proposed Methodology - PM). Δεδομένου ότι κάθε σεισμική διέγερση δρα ταυτόχρονα κατά τους δύο οριζόντιους άξονες με την ίδια ένταση, δηλαδή $\kappa = 1$ και $\ddot{u}_{gX} = \ddot{u}_{gY}$, οι πιθανοί συνδυασμοί των σεισμικών συνιστωσών περιορίζονται σε δύο: $\ddot{u}_{gX} + \ddot{u}_{gY}$ (PM+) και $\ddot{u}_{gX} - \ddot{u}_{gY}$ (PM-).
- Μία σύμφωνα με τη βελτιωμένη εκδοχή της προτεινόμενης μεθοδολογίας (Improved Proposed Methodology - IPM). Τα αποτελέσματα των PM και IPM ταυτίζονται, με εξαίρεση τα μεγέθη απόκρισης στη δύσκαμπτη πλευρά των κτιρίων, όπου στην IPM εφαρμόζονται οι διορθωτικοί συντελεστές της εξίσωσης (8).
- Μία σύμφωνα με μια μεθοδολογία παρόμοια με την Ιδιομορφική Υπερωθητική Ανάλυση (Modal Pushover Analysis) για ασύμμετρα χωρικά κτίρια (Chopra and Goel 2004, Reyes and Chopra 2011a, Reyes and Chopra 2011b), που αποκαλείται χάριν συντομίας 'συμβατική' μεθοδολογία (Conventional Procedure - CP). Η CP περιλαμβάνει ανεξάρτητη ανάλυση για κάθε διεύθυνση διέγερσης (X και Y) και χωρική επαλληλία των μεγεθών απόκρισης με τη χρήση του κανόνα των ποσοστιαίων συνδυασμών. Οι παραδοχές και η διαδικασία εφαρμογής της είναι σχεδόν πανομοιότυπες με αυτές της PM, με τη διαφορά ότι το τελευταίο βήμα προφανώς παραλείπεται, ενώ στα βήματα 2 έως 4 χρησιμοποιούνται οι ποσότητες v_{Xi} , M_{Xi}^* , V_{Xi} ή v_{Yi} , M_{Yi}^* , V_{Yi} αντί για τις v_{XYi} , M_{XYi}^* , V_{XYi} .
- Μία με τη θεωρητικά ακριβή μη γραμμική δυναμική ανάλυση (Nonlinear Dynamic Analysis – NDA) για ταυτόχρονη δράση κάθε διέγερσης κατά τους δύο οριζόντιους άξονες, με όλους τους πιθανούς συνδυασμούς ($\ddot{u}_{gX} + \ddot{u}_{gY}$, $\ddot{u}_{gX} - \ddot{u}_{gY}$, $-\ddot{u}_{gX} + \ddot{u}_{gY}$ και $-\ddot{u}_{gX} - \ddot{u}_{gY}$). Τα αποτελέσματα της μη γραμμικής δυναμικής ανάλυσης χρησιμοποιούνται ως λύση αναφοράς για τη σύγκριση προτεινόμενης και συμβατικής μεθοδολογίας.

Σε όλες τις υπερωθητικές αναλύσεις λαμβάνονται υπόψη τέσσερις ιδιομορφές (1^η, 2^η, 4^η και 5^η, καθώς η συμβολή της 3^{ης} και των ανώτερων ιδιομορφών είναι πρακτικά αμελητέα). Ο υπολογισμός της μετακίνησης του ισοδύναμου μονοβάθμιου συστήματος γίνεται με τη βοήθεια μη γραμμικής δυναμικής ανάλυσης για κάθε διέγερση και ακολουθεί πολλαπλασιασμός της με τις ποσότητες $v_{XYi}\varphi_{Ni}$ (PM και IPM) και $v_{Xi}\varphi_{Ni}$ ή $v_{Yi}\varphi_{Ni}$ (CP), ώστε να προκύψει η μετακίνηση-στόχος της «ιδιομορφής» i. Ο

υπολογισμός των «αδιομορφικών» τιμών των υπόλοιπων μεγεθών απόκρισης γίνεται με εκ νέου διεξαγωγή υπερωθητικής ανάλυσης μέχρι η μετακίνηση κορυφής να εξισωθεί με τη μετακίνηση-στόχο. Η «αδιομορφική» επαλληλία των μεγεθών απόκρισης γίνεται με τον κανόνα της πλήρους τετραγωνικής επαλληλίας (CQC).

Πίνακας 2 Κατάλογος σεισμικών διεγέρσεων

No	Διέγερση	Ημερομηνία	Μέγεθος (Ms)	Μέγιστη εδαφική επιτάχυνση PGA (m/sec ²)	Μέγιστη φασματική επιτάχυνση PSA (m/sec ²)
1	Αίγιο (διαμήκης)	06/15/1995	6.4	4.918	12.099
2	Αίγιο (εγκάρσια)			5.326	14.157
3	Θεσ/νίκη (διαμήκης)	06/20/1978	6.5	1.389	4.477
4	Θεσ/νίκη (εγκάρσια)			1.430	4.809
5	Αλκονίδες (διαμήκης)	02/24/1981	6.7	2.336	6.023
6	Αλκονίδες (εγκάρσια)			2.989	8.155
7	Καλαμάτα (διαμήκης)	09/13/1986	6.0	2.170	6.648
8	Καλαμάτα (εγκάρσια)			2.913	10.125
9	Πάτρα (διαμήκης)	07/14/1993	5.5	1.402	4.455
10	Πάτρα (εγκάρσια)			3.936	12.151
11	Πύργος (διαμήκης)	03/26/1993	5.5	1.466	5.887
12	Πύργος (εγκάρσια)			4.455	7.705

Η σύγκριση μεταξύ της προτεινόμενης και της συμβατικής μεθοδολογίας γίνεται με βάση το μέσο σφάλμα και την αντίστοιχη τυπική απόκλιση των μεγεθών απόκρισης σε σχέση με τα αποτελέσματα που προκύπτουν από τη μη γραμμική δυναμική ανάλυση. Αρχικά, υπολογίζεται για κάθε σεισμική διεγέρση j ($j = 1, 2, \dots, 12$) το ποσοστιαίο σφάλμα E_j για κάθε ελεγχόμενο μέγεθος απόκρισης R :

$$E_j (\%) = \frac{R_{j,s} - R_{j,d}}{R_{j,d}} \quad (11)$$

όπου $R_{j,s}$ και $R_{j,d}$ η τιμή του μεγέθους απόκρισης για τη διεγέρση j σύμφωνα με τη ΣΥΑ (προτεινόμενη ή συμβατική) και τη μη γραμμική δυναμική ανάλυση αντίστοιχα. Όπως φαίνεται από την εξίσωση (11), τυχόν θετικό πρόσημο του σφάλματος σημαίνει ότι η ΣΥΑ υπερεκτιμά τα μεγέθη απόκρισης, δηλαδή είναι συντηρητική σε σχέση με τη μη γραμμική δυναμική ανάλυση. Αντίστροφα, αρνητικό πρόσημο του σφάλματος σημαίνει ότι η ΣΥΑ υποεκτιμά τα μεγέθη απόκρισης, δηλαδή οδηγεί σε μη συντηρητικά αποτελέσματα. Στη συνέχεια, υπολογίζεται το μέσο σφάλμα κάθε μεγέθους απόκρισης ME για το σύνολο των δώδεκα σεισμικών διεγέρσεων από την παρακάτω σχέση:

$$ME (\%) = \frac{1}{12} \sum_1^{12} E_i = \frac{1}{12} \sum_1^{12} \left(\frac{R_{j,s} - R_{j,d}}{R_{j,d}} \right) \quad (12)$$

Στα Σχήματα 3 έως 8 δίνονται τα μέσα σφάλματα των υπερωθητικών αναλύσεων για τις 12 σεισμικές διεγέρσεις (ως προς τα αποτελέσματα της μη γραμμικής δυναμικής ανάλυσης) για τα δύο κτίρια. Τα μέσα σφάλματα αφορούν στις μετακινήσεις και στις γωνιακές παραμορφώσεις των ορόφων κατά τους άξονες X και Y στο κέντρο βάρους (CM), στην εύκαμπτη (C4) και στη δύσκαμπτη (C9) πλευρά της κάτοψης.

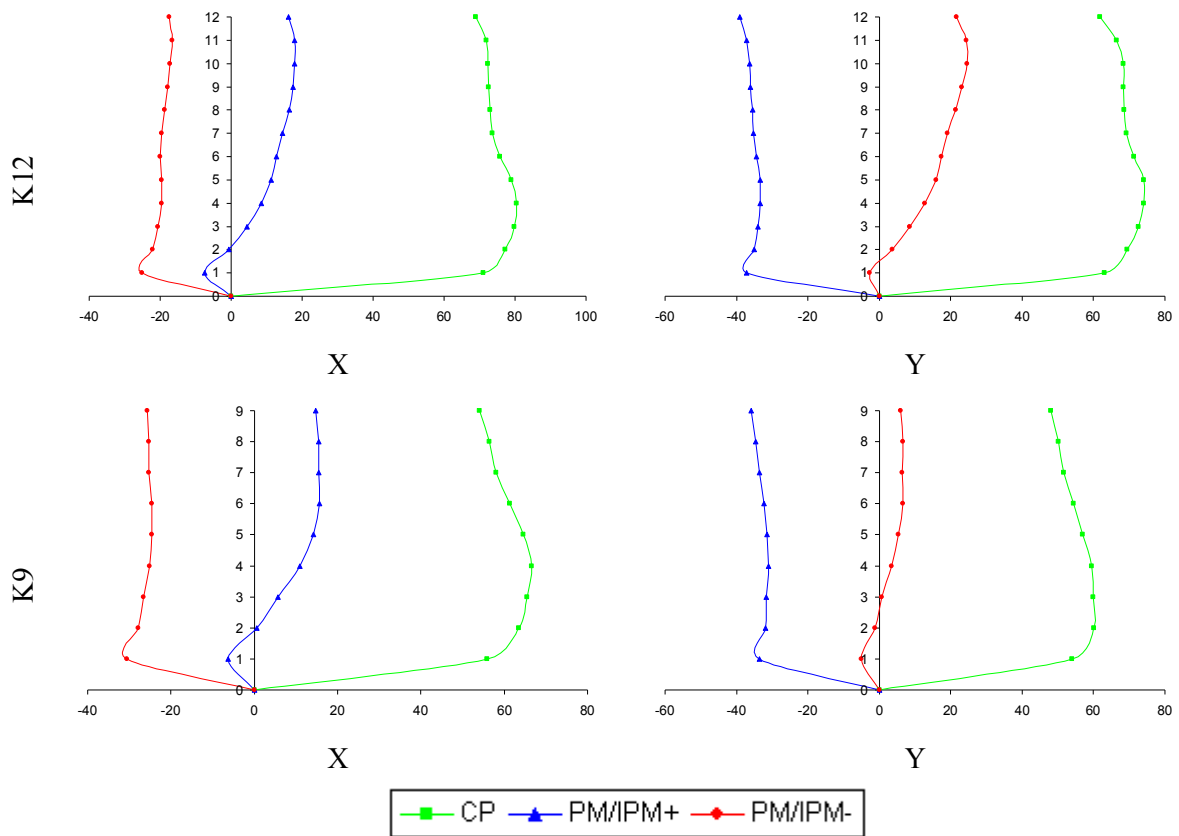
Προφανώς, οι δύο εκδοχές της προτεινόμενης μεθοδολογίας ταυτίζονται σε ό,τι αφορά στα μεγέθη απόκρισης του κέντρου βάρους και της εύκαμπτης πλευράς. Από τα Σχήματα 5 και 8 γίνεται καταρχάς φανερό ότι η εφαρμογή των διορθωτικών συντελεστών, μολονότι οδηγεί σε μερικές περιπτώσεις σε αύξηση των απόλυτων τιμών των σφαλμάτων, παρέχει γενικά μια αξιόπιστη εκτίμηση των μεγεθών απόκρισης της δύσκαμπτης πλευράς. Έτσι, θεραπεύεται σε μεγάλο βαθμό η κυριότερη αδυναμία της προτεινόμενης μεθοδολογίας στην αρχική μορφή της.

Είναι προφανές ότι οι δύο συνδυασμοί της βελτιωμένης μεθοδολογίας (IPM+ και IPM-) παρέχουν ένα άνω κι ένα κάτω όριο για κάθε μέγεθος απόκρισης. Η θεωρούμενη ακριβής τιμή που προκύπτει από τη μη γραμμική δυναμική ανάλυση τις περισσότερες φορές (114 από τις 126 υπολογισθείσες μετακινήσεις και 67 από τις 126 υπολογισθείσες γωνιακές παραμορφώσεις ορόφων) κείται σε αυτό το διάστημα. Αυτό συνηγορεί στο ότι ο αριθμός των ιδιομορφών που ελήφθησαν υπόψη είναι επαρκής. Το μέσο σφάλμα του πιο συντηρητικού συνδυασμού (IPM+ ή IPM-) για τις μετακινήσεις κυμαίνεται μεταξύ -10% και 34%, ενώ για τις γωνιακές παραμορφώσεις ορόφων μεταξύ -45% και 27%. Σε σύγκριση με τη συμβατική μεθοδολογία, οι απόλυτες τιμές των μέσων σφαλμάτων της προτεινόμενης μεθοδολογίας είναι μικρότερες σε 99 από τις 126 υπολογισθείσες μετακινήσεις και σε 85 από τις 126 υπολογισθείσες γωνιακές παραμορφώσεις ορόφων. Το μέσο σφάλμα της συμβατικής μεθοδολογίας για τις μετακινήσεις κυμαίνεται μεταξύ -9% και 96%, ενώ για τις γωνιακές παραμορφώσεις ορόφων μεταξύ -44% και 92%.

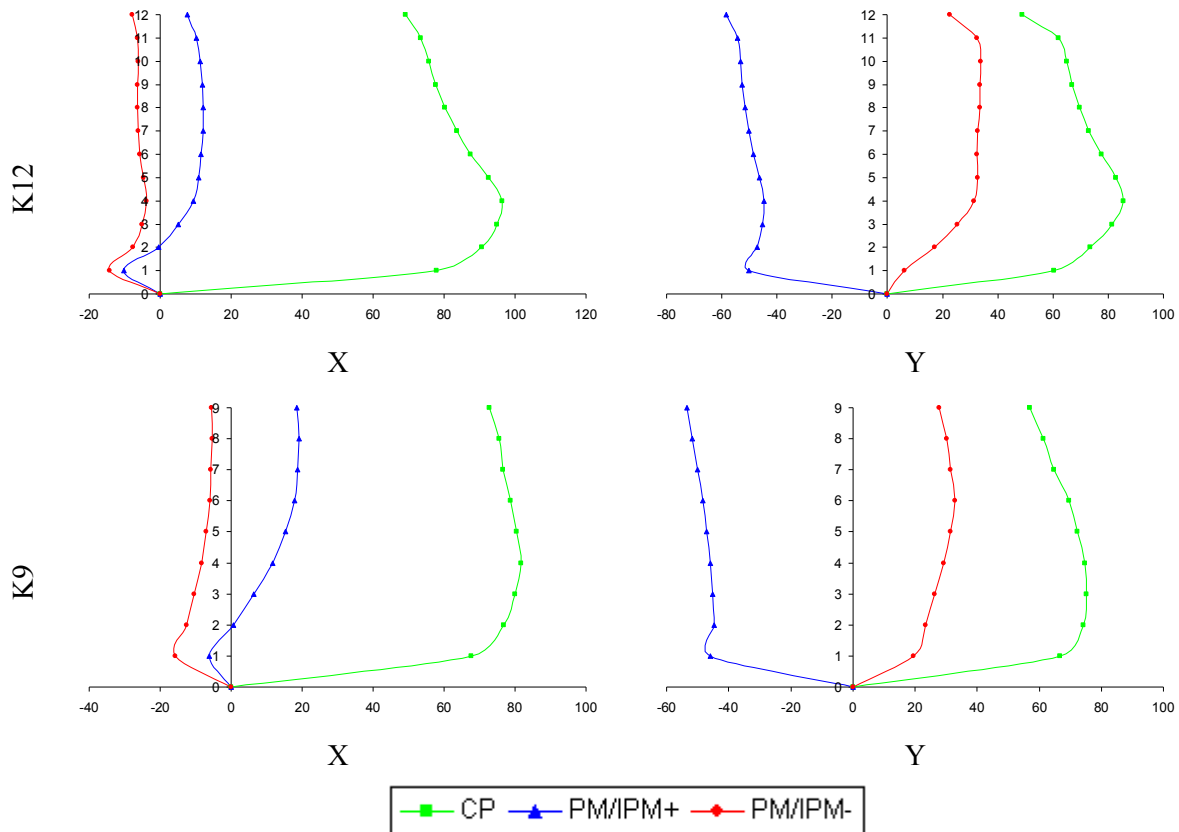
Ανακεφαλαίωση - Συμπεράσματα

Αντικείμενο της παρούσας εργασίας ήταν η αξιολόγηση μιας βελτιωμένης μεθοδολογίας υπερωθητικής ανάλυσης για την προσεγγιστική εκτίμηση της ανελαστικής σεισμικής συμπεριφοράς ασύμμετρων χωρικών συστημάτων. Η μεθοδολογία βασίζεται στη γνωστή Ιδιομορφική Υπερωθητική Ανάλυση (Modal Pushover Analysis), αλλά εισάγει επιπλέον μια τεχνική για την ταυτόχρονη συνεκτίμηση των δύο οριζόντιων συνιστωσών του σεισμού χωρίς να απαιτείται ξεχωριστή ανάλυση σε κάθε διεύθυνση, ούτε και εφαρμογή - αδόκιμων στην ανελαστική περιοχή - κανόνων χωρικής επαλληλίας. Η βελτίωση που παρουσιάστηκε εδώ συνίσταται στη διόρθωση των μεγεθών απόκρισης της δύσκαμπτης πλευράς ασύμμετρων κτιρίων με κατάλληλους συντελεστές που υπολογίζονται με τη βοήθεια ιδιομορφικής ανάλυσης. Η αξιολόγηση της βελτιωμένης εκδοχής της εν λόγω μεθοδολογίας μέσω μιας σειράς εφαρμογών σε πολυώροφα κτίρια οδήγησε στα παρακάτω συμπεράσματα:

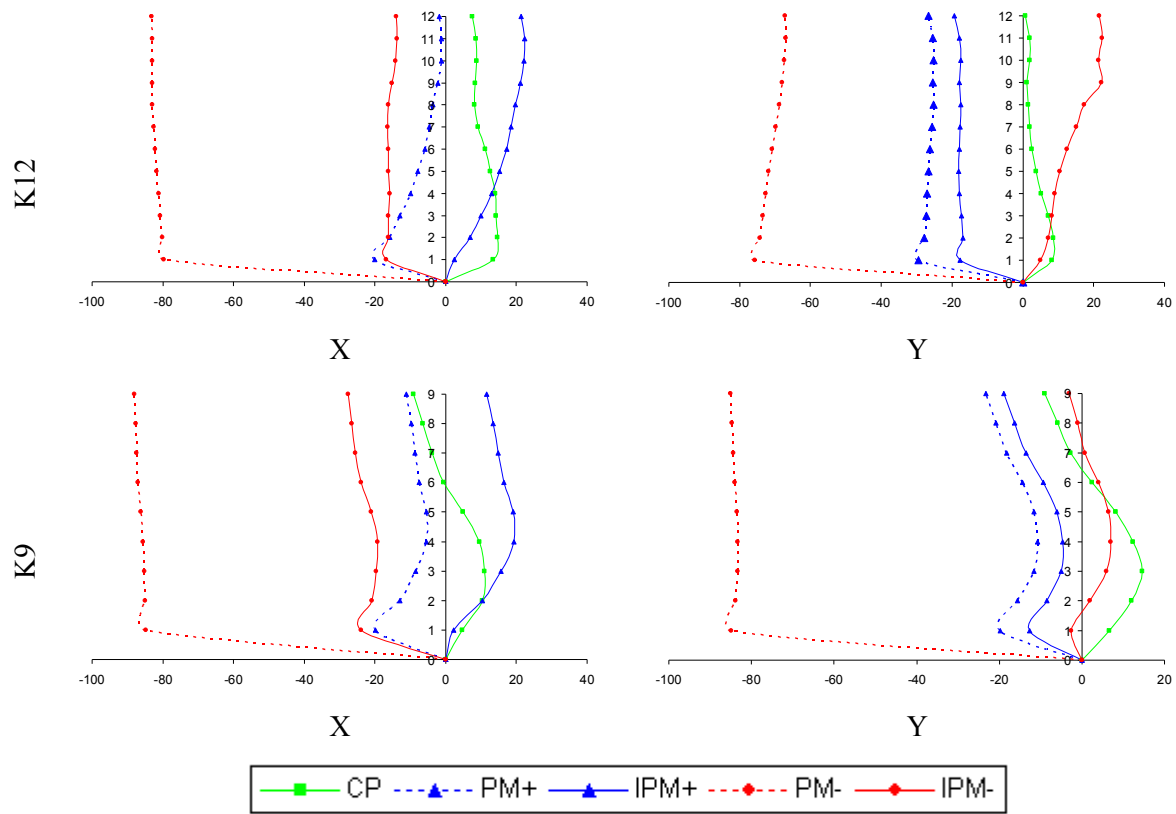
- Οι εναλλακτικοί συνδυασμοί των σεισμικών δράσεων σύμφωνα με την προτεινόμενη μεθοδολογία παρέχουν ένα άνω κι ένα κάτω όριο για κάθε μέγεθος απόκρισης που ως επί το πλείστον περιβάλλουν τις θεωρητικά ακριβείς τιμές της μη γραμμικής δυναμικής ανάλυσης.
- Σε γενικές γραμμές η προτεινόμενη μεθοδολογία είναι ακριβέστερη από μια παρόμοια πολύ-ιδιομορφική υπερωθητική ανάλυση που περιλαμβάνει ανεξάρτητη επίλυση για κάθε διεύθυνση διέγερσης και χωρική επαλληλία των αποτελεσμάτων.
- Η εισαγωγή των διορθωτικών συντελεστών οδηγεί σε θεαματική βελτίωση της ακρίβειας στην εκτίμηση των μεγεθών απόκρισης της δύσκαμπτης πλευράς.



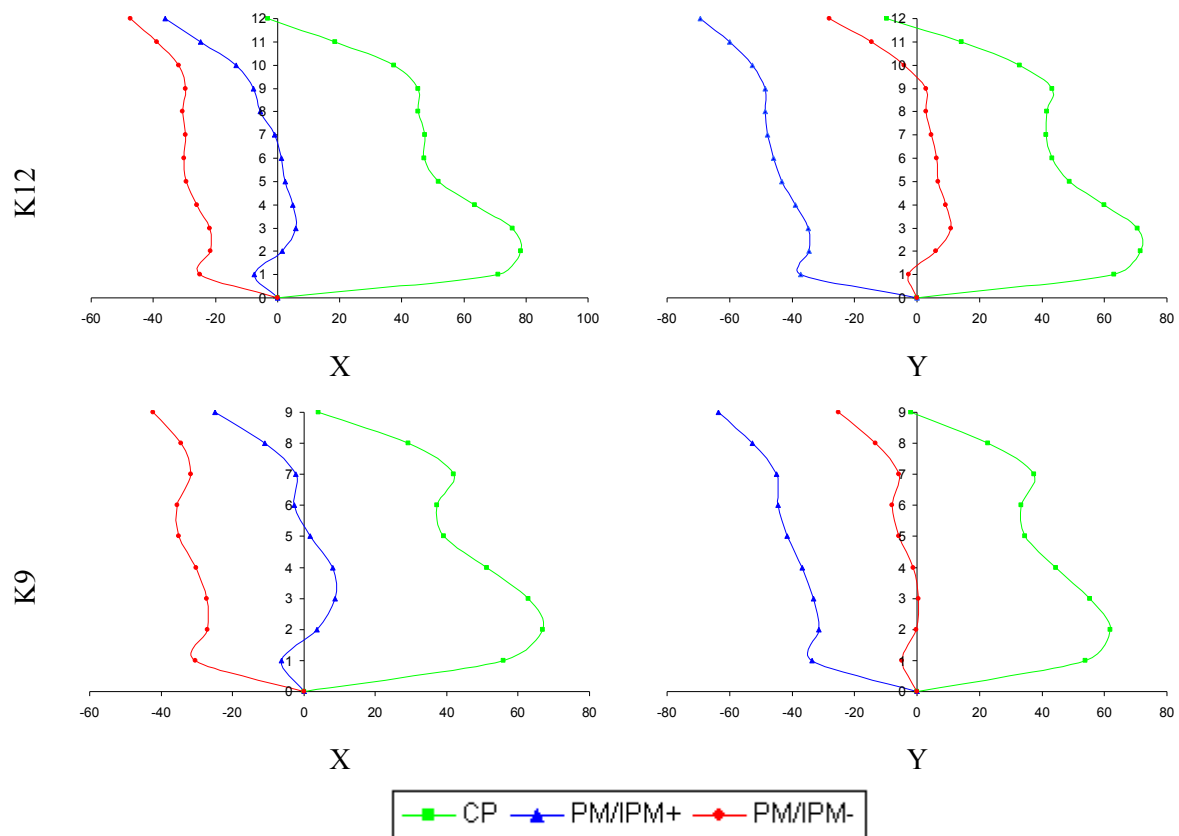
Σχ. 3 Μέσο σφάλμα (%) μετακινήσεων ορόφων στο κέντρο βάρους (CM)



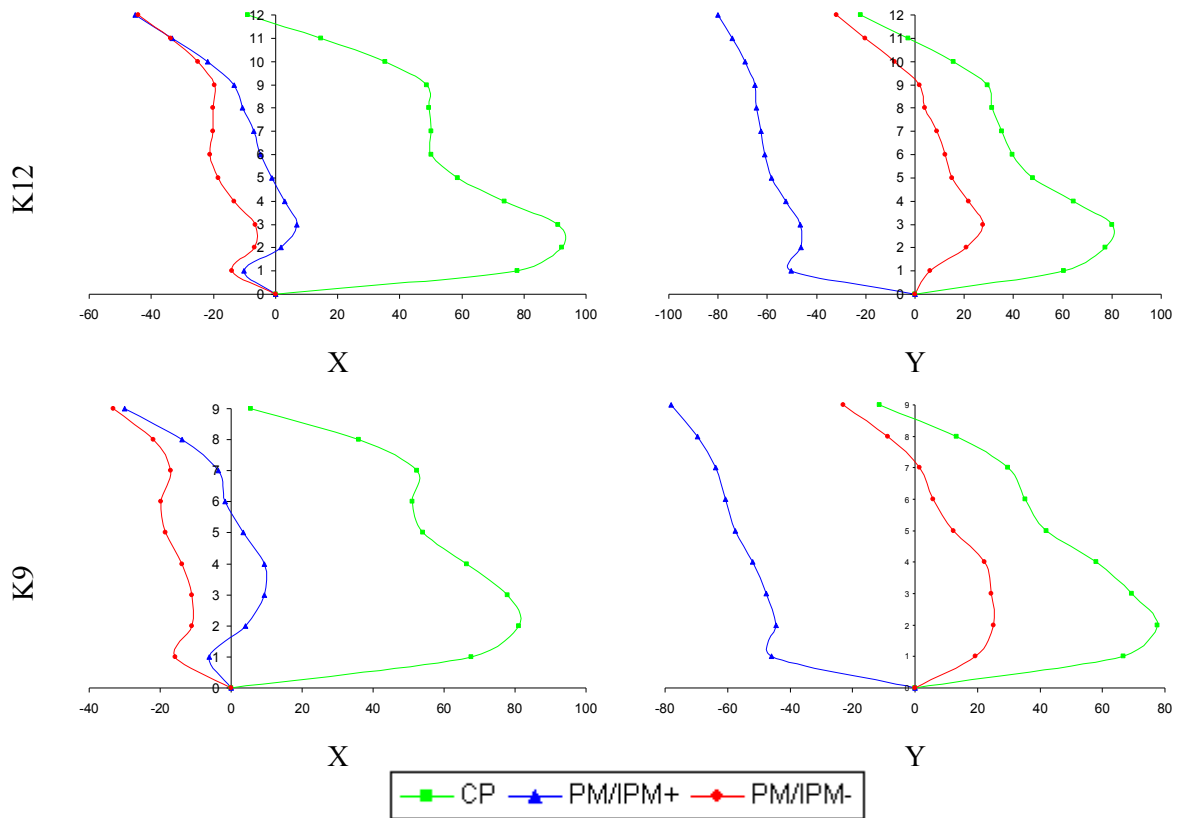
Σχ. 4 Μέσο σφάλμα (%) μετακινήσεων ορόφων στην εύκαμπτη πλευρά (C4)



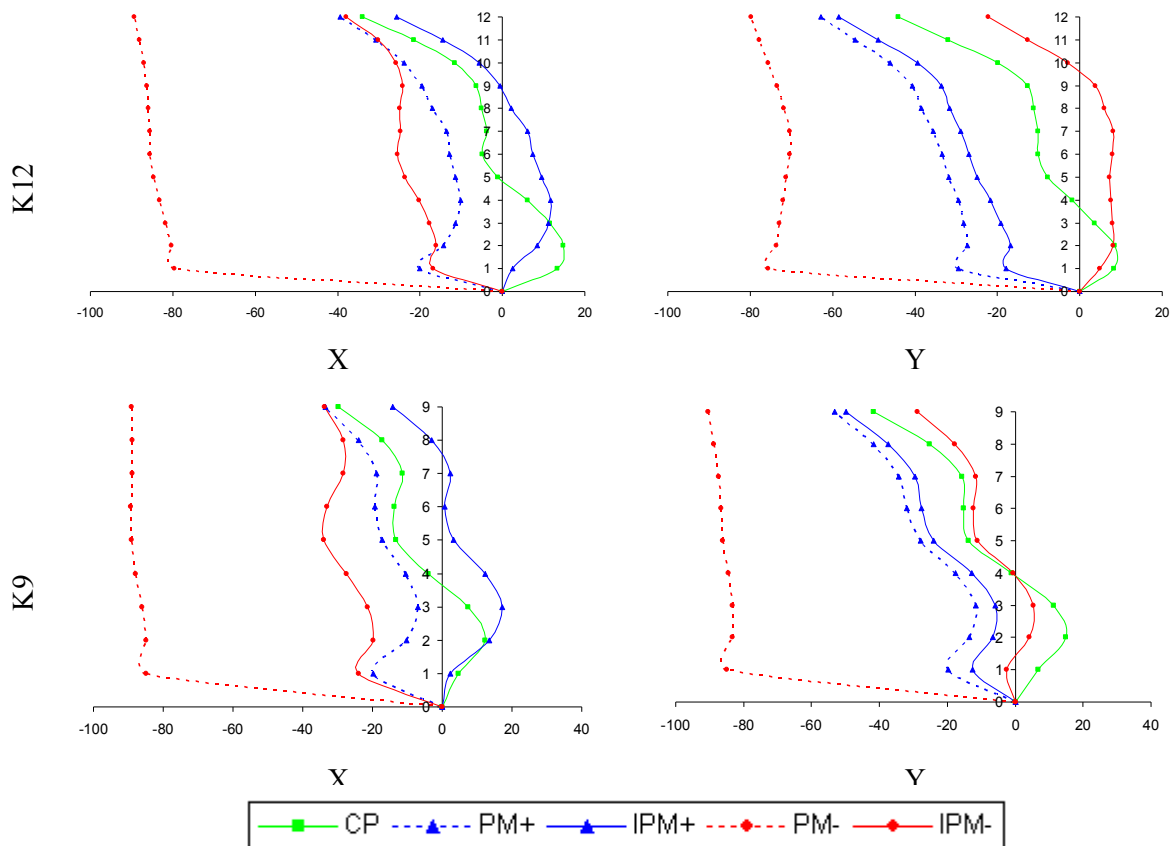
Σχ. 5 Μέσο σφάλμα (%) μετακινήσεων ορόφων στη δύσκαμπτη πλευρά (C9)



Σχ. 6 Μέσο σφάλμα (%) γωνιακών παραμορφώσεων ορόφων στο κέντρο βάρους (CM)



Σχ. 7 Μέσο σφάλμα (%) γωνιακών παραμορφώσεων ορόφων στην εύκαμπτη πλευρά (C4)



Σχ. 8 Μέσο σφάλμα (%) γωνιακών παραμορφώσεων ορόφων στη δύσκαμπτη πλευρά (C9)

Προφανώς, η γενίκευση των παραπάνω συμπερασμάτων απαιτεί τη διεξαγωγή περαιτέρω έρευνας που θα περιλαμβάνει ανάλυση μεγάλης ποικιλίας χωρικών ασύμμετρων συστημάτων για πληθώρα σεισμικών διεγέρσεων.

Βιβλιογραφία

- Chopra, A.K. and Goel R.K. (2004), "A modal pushover analysis procedure to estimate seismic demands for unsymmetric-plan buildings", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 33, pp. 903-927.
- Fajfar, P., Marusic, D. and Perus, I. (2005), "The extension of the N2 method to asymmetric buildings", *Proceedings of the 4th European Workshop on the Seismic Behaviour of Irregular and Complex Structures, 4EWICS*, Thessaloniki, Greece, August 2005, Paper No. 41.
- Manoukas, G.E., Athanatopoulou, A.M. and Avramidis I.E. (2012), "Multimode Pushover Analysis for Asymmetric Buildings under Biaxial Seismic Excitation Based on a new Concept of the Equivalent Single Degree of Freedom System", *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Vol. 38, pp. 88-96.
- Manoukas, G.E. and Avramidis, I.E. (2014), "Evaluation of a Multimode Pushover Procedure for Asymmetric in Plan Buildings under Biaxial Seismic Excitation", *Bulletin of Earthquake Engineering*, Vol. 12, No. 6, pp. 2607-2632.
- Manoukas, G.E. and Avramidis, I.E. (2015), "Improved Multimode Pushover Procedure for Asymmetric in Plan Buildings under Biaxial Seismic Excitation – Application to Tall Buildings", *The Structural Design of Tall and Special Buildings*, Vol. 24, No. 6, pp. 397-420.
- Reyes, J.C. and Chopra, A.K. (2011a), "Three dimensional modal pushover analysis of buildings subjected to two components of ground motion, including its evaluation for tall buildings", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 40, pp. 789-806.
- Reyes, J.C. and Chopra, A.K. (2011b), "Evaluation of three-dimensional modal pushover analysis for unsymmetric-plan buildings subjected to two components of ground motion", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*. Vol. 40, pp. 1475-1494.