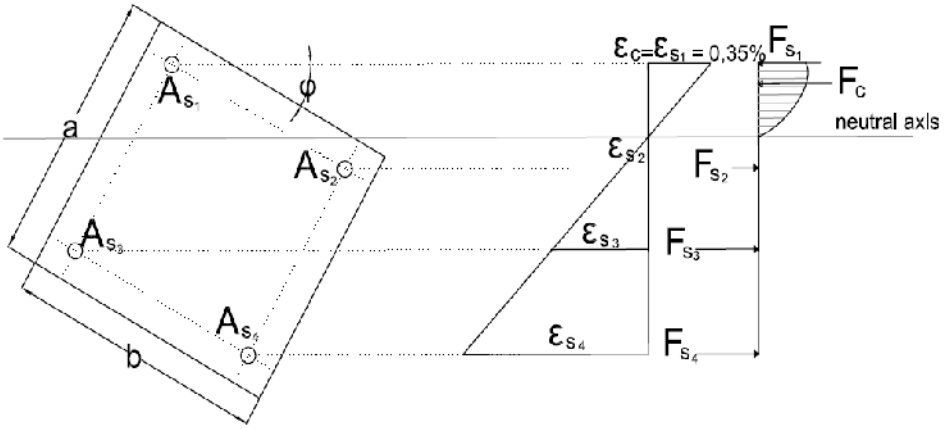
# Επιρροή της διαξονικότητας στις καμπυλότητες διαρροής και αστοχίας και στις γωνίες στροφής-χορδής και πλαστικής στροφής

**Εμμανουήλ Βουγιούκας**
*Λέκτορας, ΣΠΜ ΕΜΠ, manolis@central.ntua.gr*
**Αθανάσιος Στάμος**
*ΕΔΙΠ, ΣΠΜ ΕΜΠ, stamthan@central.ntua.gr*

## Εκτενής περίληψη

Στην ανελαστική ανάλυση κατασκευών από οπλισμένο σκυρόδεμα, σύμφωνα με τις σύγχρονες απαιτήσεις (ACI SP-17M-09, ASCE7-05, EN 1998-3, ΚΑΝΕΠΕ) προτείνονται από τους κανονισμούς εμπειρικές εκφράσεις για τον προσδιορισμό της καμπυλότητας διαρροής και αστοχίας διατομών, όπως και για τη συνολική ικανότητα στροφής χορδής μελών στην οριακή κατάσταση αστοχίας. Αυτές οι εκφράσεις έχουν βαθμονομηθεί βάσει πληθώρας πειραματικών αποτελεσμάτων, ενώ δεν έχουν αναπτυχθεί αντίστοιχα θεωρητικά μοντέλα. Αυτά τα πειραματικά αποτελέσματα, ωστόσο, βασίζονται, κατά κανόνα, σε μονοαξονική καταπόνηση (Panagiotakos and Fardis, 2001). Έτσι, ενώ σε επίπεδο αντοχής, έχουν αναπτυχθεί προσομοιώματα και λογισμικό για διαξονική καταπόνηση (Bonet et al, 2004, Charalampakis and Koumousis, 2008, Fossetti and Papia, 2012, Papanikolaou and Sextos, 2016), δεν έχει υπάρξει αντίστοιχη ανάπτυξη σε επίπεδο παραμορφώσεων.
Στην παρούσα εργασία αναπτύσσεται μια μέθοδος για την εκτίμηση της επιρροή της διαξονικότητας στην παραμορφωσιμότητα και στην αντοχή των δομικών μελών από οπλισμένο σκυρόδεμα.




Σχ. 1. Ανηγμένες παραμορφώσεις και εσωτερικές δυνάμεις
σε ορθογωνική διατομή οπλισμένου σκυροδέματος υπό διαξονική κάμψη.

Θεωρούμε έναν συνδυασμό My/Mx που δίνει στον ουδέτερο άξονα της διατομής την κλίση κατά τη γωνία φ (tan φ = My/Mx). Η αξονική δύναμη και οι καμπτικές ροπές που αντιστοιχούν στη διαρροή της διατομής προκύπτουν στο σκυρόδεμα(co) και στον χάλυβα (st) ως:

$$N = N_{co} + N_{st} = \iint \sigma(x,y)dxdy + \sum \sigma(x_i,y_i)\pi d_i^4/4$$
$$M_{x,co} + M_{x,st} = \iint y\sigma(x,y)dxdy + \sum y_i\sigma(x_i,y_i)\pi d_i^4/4 \quad (1)$$

$$M_{y,co} + My,st = \iint x\sigma(x,y)dxdy + \sum x_i\sigma(x_i,y_i)\pi d_i^4/4$$

Τα διπλά ολοκληρώματα υπολογίζονται με αριθμητική μέθοδο (των λωρίδων). Το μήκος κάθε λωρίδας εξαρτάται από τη γωνία φ και την απόστασή της από τον ουδέτερο άξονα ($y'_s$). Οι συντεταγμένες των 4 κορυφών ως προς τον πλαγιογώνιο άξονα υπολογίζονται ως:

$$\vec{t} = (cos\varphi sin\varphi), \vec{n} = (-sin\varphi cos\varphi)$$
$$\vec{v} = (x_j, y_j),\ x'_j = \vec{v}\cdot\vec{t},\ y'_j = \vec{v}\cdot\vec{n} \qquad (2)$$

Για την εύρεση του μήκους $b_s$ και του κέντρου βάρους $x_g$, $y_g$ κάθε λωρίδας τα σημεία τομής ($x_{s1}$, $y_{s1}$) και ($x_{s2}$, $y_{s2}$) κάθε λωρίδας με τις πλευρές της διατομής υπολογίζονται ως:

$$b_s(y'_s) = \sqrt{(x_{s2}-x_{s1})^2 + (y_{s2}-y_{s1})^2} \quad , \quad x_g(y'_s) = \frac{x_{s2}+x_{s1}}{2} \quad , \quad y_g(y'_s) = \frac{y_{s2}+y_{s1}}{2}$$

Τότε, η διπλή ολοκλήρωση της (1) δίνει:

$$N_{co} = \int_{y'_a}^{y'_b} A\, b_s(y'_s)\sigma(y'_s)dy'$$

$$M_{x,co} = \int_{y'_a}^{y'_b} y_g(y'_s)b_s(y'_s)\sigma(y'_s)dy' \qquad (3)$$
$$M_{y,co} = \int x_g(y'_s)b_s(y'_s)\sigma(y'_s)dy'$$

Τα ολοκληρώματα (3) υπολογίζονται με τον κανόνα του τραπεζίου.

Ως διαρροή της διατομής ορίζεται είτε όταν η μέγιστη τροπή στο θλιβόμενο σκυρόδεμα φτάνει την τιμή $\varepsilon_{up}=\varepsilon_{yield,C}$, ή η τροπή της ράβδου χάλυβα με τη μεγαλύτερη παραμόρφωση φτάνει την τάση διαρροής του χάλυβα $\varepsilon_{down}=\varepsilon_{yield}$, ενώ, βάσει μεθόδου αριθμητικής σύγκλισης έχει εξασφαλισθεί η ισορροπία όσο αφορά τις αξονικές δυνάμεις. Αντίστοιχος υπολογισμός γίνεται για την ροπή αντοχής, με την αντικατάσταση στις προηγούμενες σχέσεις, των τροπών διαρροής με τις τροπές αστοχίας. Για τον υπολογισμό της γωνίας χορδής κατά τη διαρροή ή την αστοχία του μέλους, θεωρείται συμμετρικός οπλισμός και στα δύο άκρα του, οπότε υφίσταται ένα σημείο καμπής στο μέσον του. Η καμπυλότητα σε καθένα από τα άκρα του ισούται με:

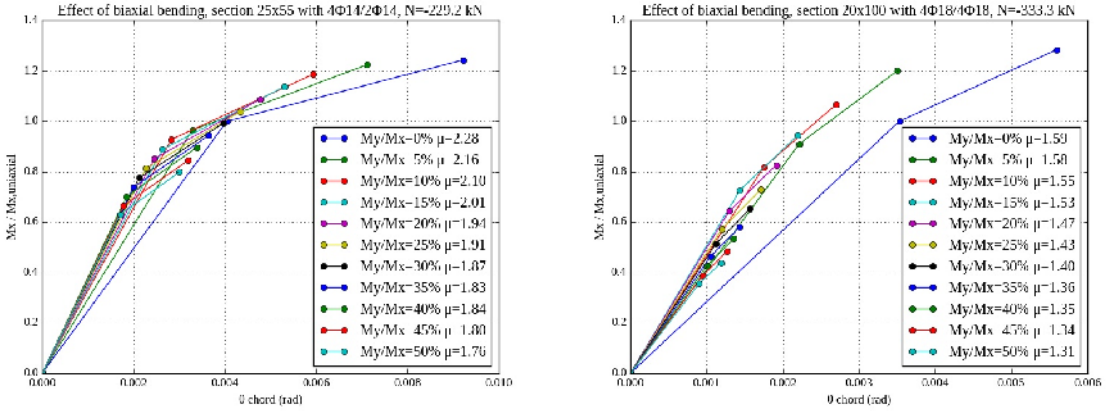
$$\frac{1}{R} = v'' = \frac{|\varepsilon_{down}| + |\varepsilon_{up}|}{d} \qquad (4)$$

Όπου d η απόσταση κατά τον άξονα των y' μεταξύ των δύο ακραίων σημείων. Η καμπυλότητα μεταβάλλεται γραμμικά καταμήκος του μέλους, οπότε η διαφορική εγκάρσια μετακίνηση στα άκρα του προκύπτει με τη διπλή ολοκλήρωση της εξ. (2) από το μέσον (L/2) ως το άκρο του μέλους. Η διεύθυνση του βέλους κάμψης είναι παράλληλη στον άξονα y', οπότε η συνιστώσα του κατά y πρέπει να πολλαπλασιασθεί με cosφ. Τελικώς, διαιρώντας με το αντίστοιχο μήκος L/2 η γωνία στροφής χορδής προκύπτει ως:

$$\theta_{chord} = \frac{v''}{6}\frac{L}{2} \qquad (5)$$

Έχει γίνει πληθώρα επιλύσεων για χαρακτηριστικές περιπτώσεις υποστυλωμάτων, από τις οποίες παρατίθενται χαρακτηριστικά αυτές του σχήματος 2. Από αυτές προκύπτει ότι η διαθέσιμη γωνία ροπής – χορδής (και η αντίστοιχη πλαστιμότητα σε όρους στροφών) περιορίζεται σημαντικά, όταν

συνυπολογισθεί η ύπαρξη μιας εγκάρσιας My (η οποία μπορεί να υφίσταται και από τα μη σεισμικά φορτία). Η παράμετρος αυτή επηρεάζει σημαντικότατα τις ανελαστικές αναλύσεις δομημάτων και δεν μπορεί να απαλείφεται.




Σχ. 2. Επιρροή της εκτός επιπέδου ροπής My, (ως λόγος My/Mx) στη μείωση της διαθέσιμης γωνίας χορδής $\theta_{chord}$, για χαρακτηριστικές διατομές δομικών μελών κατασκευής 1959-1984

**Βιβλιογραφία**

ACI SP-17M-09 (2010), ACI design handbook – design of structural reinforced concrete elements in accordance with ACI 31 SM-05, *ACI American Concrete Institute*, Farmington Hills, Michigan.

ASCE7-05 (2010), Minimum design loads for buildings and other structures –revision of ACSE 7-89 *American Society of Civil Engineers*, Reston, Virginia.

Bonet J., Miguel P.F., Fernandez M.A., Romero M.L., (2004), Analytical approach to failure surfaces in reinforced concrete sections subjected to axial loads and biaxial bending, *J Struct Eng (ASCE)*, 130(12), pp. 2006–2015.

Eurocode 8: Design of structures for earthquake resistance – Part 3: Assessment and retrofitting of building, *European Committee for Standardization*, Brussels.

Charalampakis A.E., Koumousis V.K. (2008), Ultimate strength analysis of composite sections under biaxial bending and axial load, *Advanced Engineering Software* 39, pp. 923-936.

Fossetti, M., Papia M., (2012), Dimensionless analysis of RC rectangular sections under axial loadand biaxial bending, *Engineering Structures* 44, pp. 1-17.

ΚΑΝΕΠΕ (2012), Κανονισμός Επεμβάσεων, *Οργανισμός Αντισεισμικού Σχεδιασμού και Προστασίας (ΟΑΣΠ)*, ΥΠΕΚΑ, Αθήνα.

Makarios T., Asteris P. Numerical Investigation of Seismic Behavior of Spatial Asymmetric Multi-Storey Reinforced Concrete Buildings with Masonry Infill Walls, *The Open Construction and Building Technology Journal*, 6, (Suppl 1-M8) 113-125.

Panagiotakos T, Fardis M. (2001), Deformations of reinforced concrete members at yielding and ultimate *ACI Structural Journal*, Volume 98, Issue 2, pp. 135-148.

Papanikolaou, V.K., Sextos A.G, (2016), Design charts for rectangular R/C columns under biaxial bending: A historical review toward a Eurocode-2 compliant update, *Engineering Structures* 44, pp. 34-45.

Press W.H., Flannery B.P., Teukolsky S.A., Vetterling W.T. (1992) *Numerical Recipes in FORTRAN: The Art of Scientific Computing*, 2nd ed., Cambridge University Press, Cambridge.

Vaz Rodrigues R. (2015), A new technique for ultimate limit state design of arbitrary shape RC sections under biaxial bending, *Engineering Structures 104*, pp 34-45