

**ΟΡΙΑΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗΣ
ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΜΕΤΑΛΛΙΚΩΝ ΦΥΛΛΩΝ
ΜΕ ΤΑΣΕΙΣ ΔΙΑΡΡΟΗΣ,
ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΕΣ ΣΕ ΘΛΙΨΗ ΚΑΙ ΕΦΕΛΚΥΣΜΟ**

Κωνσταντίνος Νικολάου

Διπλ. Πολιτικός Μηχανικός, Υποψ. Διδάκτορας
Εργαστήριο Μεταλλικών Κατασκευών, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών,
Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης
54124 Θεσσαλονίκη, Ελλάδα
e-mail: konnikol@civil.auth.gr

Χρήστος Μπίσμπος

Καθηγητής
Εργαστήριο Μεταλλικών Κατασκευών, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών,
Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης
54124 Θεσσαλονίκη, Ελλάδα
e-mail: cbisbos@civil.auth.gr

1. ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Είναι γνωστό πως η έλαση παράγει στα μεταλλικά φύλλα ανισοτροπία, η οποία εκδηλώνεται και ως διαφορετική τάση διαρροής σε θλίψη και εφελκυσμό. Διάφορα κριτήρια διαρροής έχουν προταθεί στην διεθνή βιβλιογραφία για τα ανωτέρω ανισότροπα φαινόμενα. Στην παρούσα εργασία μορφώνεται και επιλύεται το πρόβλημα οριακής ανάλυσης και ανάλυσης προσαρμογής επιπέδων μεταλλικών φύλλων (κατάσταση επίπεδης έντασης) υπό κριτήρια ανισοτροπίας διαρροής ως πρόβλημα γενικού μη-γραμμικού μαθηματικού προγραμματισμού. Παρατίθεται αριθμητικό παράδειγμα.

2. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η οριακή ανάλυση, όπως και η γενίκευση της η ανάλυση προσαρμογής (shakedown) οδηγούν στον προσδιορισμό των περιθωρίων ασφαλείας έναντι κατάρρευσης μιας ελαστοπλαστικής κατασκευής. Η οριακή ανάλυση αφορά σε φορτία μονοτονικά αυξανόμενα ενώ για την ανάλυση προσαρμογής η φόρτιση μπορεί να μεταβάλλεται με τυχαίο τρόπο εντός μιας δεδομένης περιοχής φόρτισης [1-4].

Η υπολογιστική υλοποίηση τέτοιων μεθόδων επιτυγχάνεται με την σύζευξη μεθόδων πεπερασμένων στοιχείων (FEM) με τεχνικές μαθηματικής βελτιστοποίησης (ή μαθηματικού προγραμματισμού - mathematical programming). Καθοριστικής σημασίας είναι τα τοπικά κριτήρια διαρροής που θα χρησιμοποιηθούν για να περιγράψουν την

ελαστοπλαστική συμπεριφορά. Στη βιβλιογραφία υπάρχει πληθώρα κριτηρίων για ραβδωτούς (Ευρωκώδικες, Orbison κ.α.) αλλά και επιφανειακούς (von Mises, Hill, Tresca κ.α.) φορείς. Αν το κριτήριο είναι γραμμικό ή γραμμικοποιημένο οδηγούμαστε σε ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού. Για τέτοιου είδους προβλήματα υπάρχουν εξαιρετικοί αλγόριθμοι επίλυσης. Όταν όμως τα κριτήρια είναι μη-γραμμικά τότε προκύπτουν προβλήματα μη-γραμμικού προγραμματισμού. Οι διατιθέμενοι αλγόριθμοι για τέτοιου είδους προβλήματα εξαρτώνται από τον τύπο της μη γραμμικότητας. Η παραγωγισιμότητα και η κυρτότητα των κριτηρίων καθορίζουν την δυνατότητα ή μη επίλυσης από τους διαθέσιμους αλγόριθμους.

Μια ειδική υποπερίπτωση μη-γραμμικών προβλημάτων είναι και τα προβλήματα κωνικού προγραμματισμού δευτέρας τάξης (Second Order Cone Programming SOCP), για τέτοια προβλήματα υπάρχουν διαθέσιμα λογισμικά που έχουν τη δυνατότητα ταχύτατης επίλυσης ακόμα και πολύ μεγάλης κλίμακας προβλημάτων. Στις εργασίες [5,6] έγιναν προσεγγίσεις των γενικά μη-γραμμικών και σε ορισμένες περιπτώσεις μη-κυρτών κριτηρίων που περιγράφονται στους Ευρωκώδικες με ελλειψοειδή. Υπό ελλειψοειδή κριτήρια διαρροής το πρόβλημα μετατρέπεται σε SOCP και επιλύεται ταχύτατα.

Στην παρούσα εργασία τα κριτήρια θα χρησιμοποιηθούν στην αρχική μη-γραμμική τους μορφή. Τα προκύπτοντα προβλήματα θα επιλυθούν με το ελεύθερο λογισμικό IPOPT [7] που μπορεί να διαχειριστεί μεγάλης κλίμακας γενικής μορφής μη γραμμικά προβλήματα, αρκεί οι ανισοτικοί περιορισμοί να είναι δυο φορές συνεχώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις.

Στην εργασία [8] οι Cazacu και Barlat πρότειναν ένα μη-γραμμικό κριτήριο που μπορεί να περιγράψει την ασυμμετρία διαρροής σε εφελκυσμό και θλίψη που εμφανίζεται σε πολλά μέταλλα. Τα συνήθη κριτήρια, όπως το von Mises δεν μπορούν να λάβουν υπόψη τέτοια φαινόμενα. Τα κράματα μαγνησίου ή τιτανίου αλλά και γενικά τα HCP μέταλλα (Hexagonal Closed Packed Metals) [8,9] παρουσιάζουν μεγάλη διαφορά στις τάσεις διαρροής σε εφελκυσμό και θλίψη. Δεδομένης της συνεχώς αυξανόμενης χρήσης τέτοιων μετάλλων στην εμβιομηχανική, την μικροηλεκτρονική, την αεροναυπηγική κ.α. λόγω των ιδιοτήτων τους (βιοσυμβατότητα, χαμηλά βάρη, υψηλές αντοχές) αλλά και του υψηλού τους κόστους είναι απαραίτητη η ακριβέστερη περιγραφή των περιθωρίων ασφαλείας τους. Το κριτήριο Cazacu Barlat έρχεται σε συμφωνία με πειραματικά αποτελέσματα, επιπλέον είναι κυρτό και δυο φορές παραγωγίσιμο. Επομένως κρίνεται κατάλληλο για χρήση στην αρχική μη-γραμμική του μορφή σε συνδυασμό με μεθόδους FEM για την οριακή ανάλυση και την ανάλυση προσαρμογής μεταλλικών φύλλων.

3. ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗΣ ΥΠΟ ΜΗ-ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΚΡΙΤΗΡΙΑ

Έστω ένας επίπεδος φορέας Ω , διακριτοποιημένος σε NE επιφανειακά πεπερασμένα στοιχεία. Το κάθε στοιχείο έχει NGE σημεία ελέγχου των τάσεων (Gauss Point) οπότε το Ω έχει συνολικά $NG = NExNGE$ τέτοια σημεία. Έστω ότι στον Ω επιβάλλονται NV διαφορετικές φορτίσεις, και έστω a ένας πολλαπλασιαστής των μεταβλητών φορτίων. Αν $\mathbf{v}_j^{(i)}$ είναι το διάνυσμα της ελαστικής έντασης στο j σημείο λόγω της i φορτιστικής κατάστασης τότε η τελική ελαστοπλαστική ένταση στο κάθε σημείο Gauss θα είναι: $a \mathbf{v}_j^{(i)} + \boldsymbol{\rho}_j$, όπου $\boldsymbol{\rho}_j$ είναι ένα αυτοϊσορροπούμενο εντατικό πεδίο που θα πρέπει να ικανοποιεί τη συνθήκη του μηδενικού υποχώρου (null space condition - $\sum \mathbf{H}_j \boldsymbol{\rho}_j = 0$). Τα μητρώα \mathbf{H}_j συναποτελούν το ισορροπιακό μητρώο του φορέα.

Η ελαστοπλαστική ένταση θα πρέπει να ικανοποιεί το κριτήριο διαρροής f σε όλα τα σημεία ελέγχου των τάσεων. Τελικά το πρόβλημα της ανάλυσης προσαρμογής μπορεί να γραφεί ως το παρακάτω πρόβλημα μη-γραμμικής βελτιστοποίησης με άγνωστους τον πολλαπλασιαστή των φορτίων α και το αυτοϊσορροπούμενο εντατικό πεδίο ρ_j :

$$\begin{aligned} & \max a \\ & \text{s.t.}: \sum \mathbf{H}_j \rho_j = 0 \\ & f[a \mathbf{v}_j^{(i)} + \rho_j] \leq 0 \\ & i = 1, 2, \dots, NG \ \& \ j = 1, 2, \dots, NV \end{aligned} \quad (1)$$

Αν ο αριθμός των κορυφών φόρτισης γίνει μονάδα δηλαδή $NV = 1$ τότε προκύπτει το πρόβλημα της οριακής ανάλυσης.

4. ΤΟ ΚΡΙΤΗΡΙΟ CAZACU-BARLAT (2004)

Όπως αναφέρθηκε στην εισαγωγή, παρόλο που στα περισσότερα κριτήρια διαρροής δεν περιγράφεται, σε ορισμένα μέταλλα παρατηρείται διαφορετική τάση διαρροής σε μονοαξονικό εφελκυσμό και θλίψη. Οι Cazacu και Barlat [8] πρότειναν ένα νέο κριτήριο διαρροής για ισότροπα μέταλλα που η αντοχή τους είναι ανεξάρτητη από την υδροστατική πίεση και που λαμβάνει υπόψη το παραπάνω φαινόμενο. Το κριτήριο γράφεται:

$$f = (J_2)^{\frac{3}{2}} - c J_3 - \frac{\sigma_Y^3}{3\sqrt{3}} \quad (2)$$

J_2 και J_3 είναι η δεύτερη και τρίτη αναλλοίωτη του τανυστή των τάσεων, σ_Y η τάση διαρροής και c μια παράμετρος που εξαρτάται από το υλικό και δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$c = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{\sigma_t^3 - \sigma_c^3}{\sigma_t^3 + \sigma_c^3} \quad (3)$$

όπου σ_t και σ_c οι τάσεις διαρροής σε μονοαξονικό εφελκυσμό και θλίψη αντίστοιχα. Είναι προφανές πως για ίδιες τάσεις διαρροής σε θλίψη και εφελκυσμό προκύπτει $c = 0$ και το κριτήριο σε αυτή την περίπτωση ισοδυναμεί με το von Mises. Στο παράρτημα της [8] αποδεικνύεται ότι για να είναι κυρτή η επιφάνεια διαρροής του κριτηρίου πρέπει το

$$c \in \left[-3 \frac{\sqrt{3}}{2}, +3 \frac{\sqrt{3}}{4}\right].$$

Για συνθήκες επίπεδης έντασης το κριτήριο σε όρους κυρίων τάσεων γράφεται:

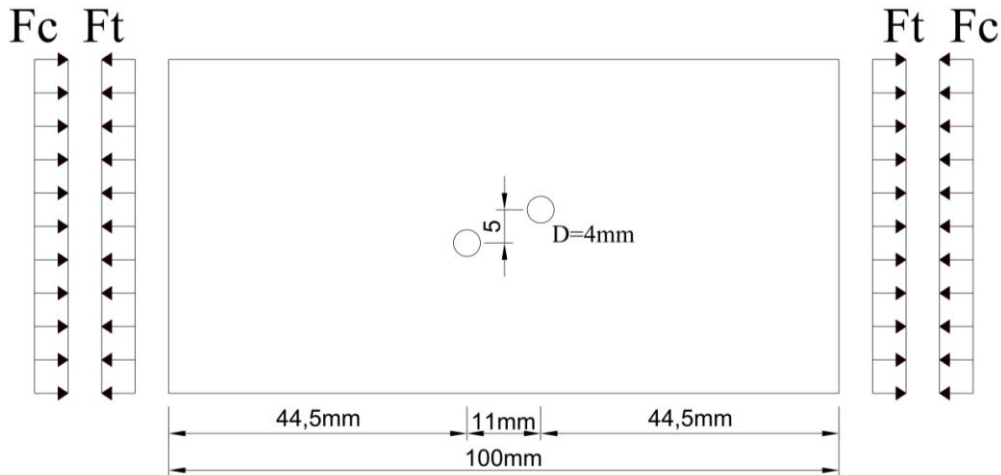
$$\left[\frac{1}{3}(\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2)\right]^{\frac{3}{2}} - \frac{c}{27}[2\sigma_1^3 + 2\sigma_2^3 - 3(\sigma_1 + \sigma_2)\sigma_1 \sigma_2] = \frac{\sigma_Y^3}{3\sqrt{3}} \quad (4)$$

5. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Το επίπεδο μεταλλικό φύλλο με δύο οπές του σχήματος 1, κατασκευασμένο από κράμα μαγνησίου AZ31B, υποβάλλεται σε οριακή ανάλυση και ανάλυση προσαρμογής υπό το κριτήριο von Mises αλλά και το κριτήριο Cazacu Barlat. Θα χρησιμοποιηθούν δύο φορτιστικές καταστάσεις, η πρώτη στην οποία το φύλλο υπόκειται σε εφελκυστικό φορτίο

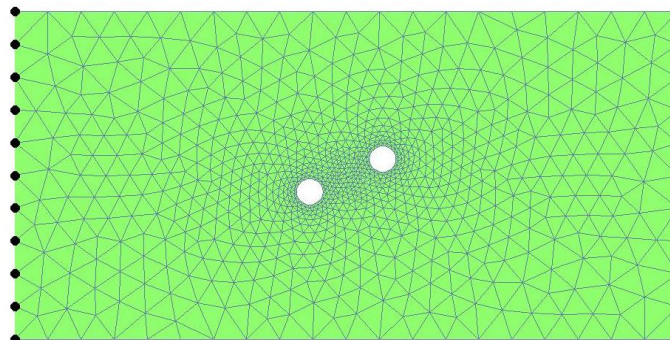
$F_t = 100 \text{ MPa}$ και η δεύτερη κατά την οποία επιβάλλουμε ίσο και αντίθετο θλιπτικό φορτίο $F_c = -100 \text{ MPa}$. Θα μελετηθούν οι παρακάτω τέσσερις περιπτώσεις αναλύσεων:

- i) οριακή ανάλυση για το εφελκυστικό φορτίο F_t
- ii) οριακή ανάλυση για το θλιπτικό φορτίο F_c
- iii) ανάλυση προσαρμογής για φορτία που μεταβάλλονται μεταξύ 0 και F_t
- iv) ανάλυση προσαρμογής για φορτία που μεταβάλλονται μεταξύ 0 και F_c



Σχ. 1 Επίπεδο φύλλο μαγνησίου AZ31B με δύο οπές

Ο φορέας προσομοιώνεται με 1734 τριγωνικά πεπερασμένα στοιχεία σταθερής έντασης και παραμόρφωσης με ένα σημείο Gauss. Το δίκτυο των πεπερασμένων στοιχείων φαίνεται στο σχήμα 2. Το μέτρο ελαστικότητας του κράματος AZ31B είναι $E = 45 \text{ GPa}$ και ο λόγος Poisson $\nu = 0,35$. Οι τάσεις διαρροής σε εφελκυσμό και θλίψη λήφθηκαν $\sigma_t = 220 \text{ MPa}$ και $\sigma_c = 140 \text{ MPa}$ αντίστοιχα.



Σχ. 2 Προσομοίωμα FEM

Από την ελαστική ανάλυση του φορέα προέκυψαν οι ελαστικές τάσεις καθώς και το ισορροπιακό μητρώο. Με αυτά τα δεδομένα μορφώθηκε κατάλληλα το πρόβλημα μη γραμμικής βελτιστοποίησης το οποίο επιλύθηκε με τη βοήθεια του ελεύθερου λογισμικού IPOPT [7].

Στον πίνακα 1 έχουν συγκεντρωθεί τα αποτελέσματα των συντελεστών ασφαλείας που προκύπτουν. Παρατηρούμε πως στην περίπτωση της οριακής ανάλυσης οι συντελεστές ασφαλείας για το κριτήριο Cazacu Barlat προκύπτουν για το εφελκυστικό φορτίο 24,3% μεγαλύτερες ενώ για το θλιπτικό φορτίο -7,9% μικρότερες. Στις περιπτώσεις της ανάλυσης

προσαρμογής ανεξάρτητα από το αν το φορτίο είναι εφελκυστικό ή θλιπτικό προκύπτει μια διαφορά περίπου 10% με τον συντελεστή ασφαλείας για το κριτήριο Cazacu Barlat να προκύπτει μεγαλύτερος. Αυτό συμβαίνει επειδή στη συγκεκριμένη φόρτιση κρίσιμη είναι η αστοχία σε εναλλασσόμενη πλαστικοποίηση (alternating plasticity) η οποία συνδέεται με τοπικά φαινόμενα πλαστικής ολιγοκυκλικής κόπωσης.

Κριτήριο Διαρροής:	von Mises	Cazacu Barlat	Διαφορά %
Οριακή Ανάλυση για Ft	$\alpha_{LA} = 2,054$	$\alpha_{LA} = 2,715$	+24,35%
Οριακή Ανάλυση για Fc	$\alpha_{LA} = 2,054$	$\alpha_{LA} = 1,840$	-7,88 %
Ανάλυση Προσαρμογής για [0, Ft]	$\alpha_{SD} = 1,582$	$\alpha_{SD} = 1,752$	+9,70 %
Ανάλυση Προσαρμογής για [0, Fc]	$\alpha_{SD} = 1,582$	$\alpha_{SD} = 1,757$	+9,96 %

Πιν. 1: Συντελεστές ασφαλείας για τα διαφορετικά κριτήρια

6. ΣΧΟΛΙΑ ΚΑΙ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Παρουσιάστηκε το πρόβλημα της ανάλυσης προσαρμογής και οριακής ανάλυσης επίπεδων μεταλλικών φύλλων υπό μη-γραμμικά κριτήρια διαρροής που περιγράφουν φαινόμενα ασυμμετρίας στην τάση διαρροής σε εφελκυσμό και θλίψη. Το ανωτέρω πρόβλημα μελετάται για πρώτη φορά στην παρούσα εργασία. Επιλέχθηκε να χρησιμοποιηθεί το κριτήριο των Cazacu Barlat 2004. Στο αριθμητικό παράδειγμα προσδιορίστηκαν οι συντελεστές ασφαλείας έναντι πλαστικής κατάρρευσης σε ένα επίπεδο μεταλλικό φύλλο από κράμα μαγνησίου AZ31B, ένα υλικό που έχει ευρεία εφαρμογή στην αεροναυπηγική. Τα αποτελέσματα συγκρίθηκαν με το κριτήριο von Mises και οι διαφορές που προέκυψαν δεν ήταν ασήμαντες.

7. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] MELAN E. “Zur Plastizität des räumlichen Kontinuums”, *Archive of Applied Mechanics*, 9, 1938, pp. 116-126.
- [2] KÖNIG JA. “*Shakedown of elastic-plastic structures*”, 1987, Elsevier, Amsterdam.
- [3] WEICHERT D., MAIER G. (eds). “*Inelastic analysis of structures under variable repeated loads*”, 2000, Kluwer Academic, Dordrecht.
- [4] WEICHERT D., SPILIOPOULOS K. (eds). “*Direct methods for Limit States of Structures and Materials*”, 2014, Springer.
- [5] SKORDELI MA-A., BISBOS C.D. “Limit and shakedown analysis of 3d steel frames via approximate ellipsoidal yield surfaces”, *Eng Struct*, 32 (6), 2010, pp.1556-1567.
- [6] NIKOLAOU K., SKORDELI MA.-A., BISBOS CD. “Limit analysis of aluminium frames via approximate ellipsoidal yield surfaces”, *10th HSTAM International Congress on Mechanics*, 2013, Chania.

- [7] WÄCHTER A., BIEGLER LT. “On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large scale nonlinear programming”, *Mathematical Programming*, 106, 2006, pp.25-57.
- [8] CAZACU O., BARLAT F. “A criterion for description of anisotropy and yield differential effects in pressure-insensitive metals”, *Int. J. Plasticity*, Vol. 20, 2004, pp. 2027-2045.
- [9] CAZACU O., PLUNKETT B., BARLAT F. “Orthotropic yield criterion for hexagonal closed packed metals”, *Int. J. Plasticity*, Vol. 22, 2006, pp. 1171-1194.

LIMIT AND SHAKEDOWN ANALYSIS OF METAL SHEETS WITH YIELDING ASSYMETRY

Konstantinos Nikolaou

Civil Engineer, PhD student
Institute of Metal Structures, Dept. of Civil Eng., Aristotle University
54124 Thessaloniki, Greece
e-mail: konnikol@civil.auth.gr

Christos Bisbos

Professor
Institute of Metal Structures, Dept. of Civil Eng., Aristotle University
54124 Thessaloniki, Greece
e-mail: cbisbos@civil.auth.gr

SUMMARY

Metal sheets develop anisotropic behavior in yielding, depending on their crystal structure, chemical properties and forming processes. A specific type of anisotropy is the yielding asymmetry between tension and compression. In the present study, the problems of limit and shakedown analysis for plane stress problems under yield criteria that include yielding asymmetry is solved as a non linear programming problem. A numerical example of a Magnesium AZ31B alloy sheet is presented and results are compared with the widely used von Mises yield criterion.