

**Ανάλυση Ευαισθησίας της Επιρροής του Μήκους
Κύματος των Σφαλμάτων Σιδηροδρομικής Γραμμής στη
Δυναμική Συνιστώσα του Φορτίου για τη
Διαστασιολόγηση των Στρωτήρων Σκυροδέματος**
Sensitivity Analysis of the Influence of the Wavelength of
Defects in a Railway Track on the Dynamic Component of
the Load for the Concrete Sleepers' Dimensioning

Κωνσταντίνος ΓΙΑΝΝΑΚΟΣ¹,

*Λέξεις κλειδιά: Μη-Ανηρτημένες Μάζες, Ανηρτημένες Μάζες, Τυπική Απόκλιση,
Σφάλματα Γραμμής, Μήκος Κύματος, Δυναμική Συνιστώσα Φορτίου.*

*Key words: Non-Suspended Masses, Suspended Masses, Standard Deviation,
Defects, Wavelength, Dynamic Component of the Load.*

ΠΕΡΙΛΗΨΗ: Η κίνηση ενός σιδηροδρομικού οχήματος (με Ανηρτημένες και Μη Ανηρτημένες Μάζες) επί της επιφάνειας κύλισης σιδηροτροχιάς, την περιοχή της κεφαλής της σιδηροτροχιάς όπου κυλιέται ο τροχός, είναι εξαναγκασμένη ταλάντωση με εξαναγκάζουσα διέγερση (δύναμη), και απόσβεση που εκφράζονται από μία τυχαία συνάρτηση. Η κίνηση περιγράφεται από μαθηματικές εξισώσεις ενώ η είσοδος στο σύστημα «Οχημα-Γραμμή» είναι η μορφή της επιφάνειας κύλισης σιδηροτροχιάς που έχει τη μορφή «σήματος». Τα σφάλματα Γραμμής είναι η τυχαία διέγερση για τους κυλιόμενους τροχούς του οχήματος και αντίστροφα. Στην περίπτωση των Μη Ανηρτημένων Μαζών οι δυνάμεις που προκύπτουν από τη διέγερση των μικρού μήκους κύματος σφαλμάτων είναι μεγάλες και έχουν μεγάλη επίδραση στην κύλιση του τροχού. Στην περίπτωση των Ανηρτημένων Μαζών των οχημάτων, οι δυνάμεις που προκύπτουν από τη διέγερση των μεγάλου μήκους κύματος σφαλμάτων είναι σημαντικές. Μια ανάλυση ευαισθησίας εκτελείται με τη σύγκριση σφαλμάτων μικρού και μεγάλου μήκους κύματος επί της δυναμικής συνιστώσας του δρώντος φορτίου επί των στρωτήρων σκυροδέματος, που πρέπει να χρησιμοποιούνται για τη διαστασιολόγησή τους.

ABSTRACT: The motion of a railway vehicle on the rail running table, that is the area of the rail-head where the wheel is rolling, is a forced oscillation with a

¹ Δρ. Πολιτικός Μηχανικός, Fellow ASCE, Member: fib, Συλλ. Πολιτικών Μηχανικών, TEE, Νεωρίων 108, Πειραιάς Τ.Κ. 18534. Τηλ.: 210.4133258· κιν.: 6973.304141. e-mails: kongiann@otenet.gr, kyannak@gmail.com. Website: <http://giannakoskonstantinos.com/wp>.

forcing excitation, and damping, expressed by a random function. The motion is described by equations; the input to the system “vehicle-rail” is the form of the rail running table in the form of a “signal”. The track defects/faults are the random excitation for the rolling wheels and vice-versa. In the case of the Non-Suspended Masses, the forces resulting from the excitation of short wavelengths are large and have grate effect on the rolling of the wheel. In the case of the Suspended Masses, the forces resulting from the excitation, of the long wavelength defects are significant. A sensitivity analysis is performed comparing the influence of short and long wavelength defects, on the dynamic component of the acting Load on the concrete sleepers, which should be used for their dimensioning.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η κίνηση ενός σιδηροδρομικού οχήματος είναι εξαναγκασμένη ταλάντωση επιβαλλόμενη από την επιφάνεια κύλισης της σιδηροτροχιάς και την απόσβεση και που εκφράζεται από μία τυχαία μη περιοδική συνάρτηση. Η κίνηση περιγράφεται από εξισώσεις και, στη Σιδηροδρομική Μηχανοτεχνία/Engineering, απεικονίζεται από την απλοποιημένη μορφή ενός συστήματος ‘μάζα-ελατήριο-αποσβεστήρας’ όπως στο Σχήμα 1, με ένα σιδηροδρομικό όχημα επί μιας γραμμής με σφάλματα κατά μήκος της (αριστερά) και δυνάμεις ασκούμενες στο αμάξωμα (δεξιά). Στο απλοποιημένο μοντέλο η γραμμή είναι ανυποχώρητη και οι δρώσες δυνάμεις είναι:

α. Το βάρος του οχήματος $m \cdot g$.

β. Η δυναμική συνιστώσα του Φορτίου P_{dyn} .

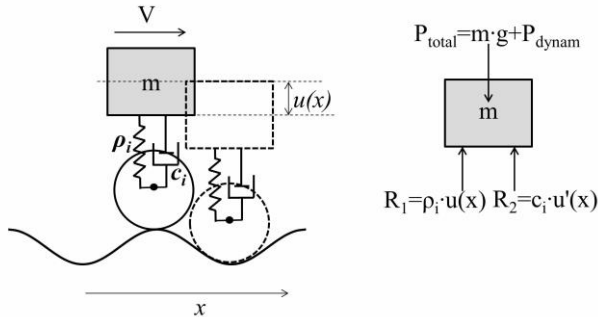
γ. Η κινούσα δύναμη $P(t)$, που είναι ίση με τη διαφορά μεταξύ της ελκτικής δύναμης της Μηχανής (locomotive) μείον την τριβή και είναι θετική σε επιταχυνόμενη κίνηση ή αρνητική σε επιβραδυνόμενη, ενώ είναι ίση με μηδέν όταν η ελκτική δύναμη ισούται με την τριβή.

δ. Η αντίδραση R_1 ίση με την ελατηριακή σταθερά ή τον συντελεστή δυσκαμψίας/ελαστικότητας ρ_i (σε kN/mm) επί την βύθιση $u(x)$ του Κέντρου Βάρους (Κ.Β.) του οχήματος.

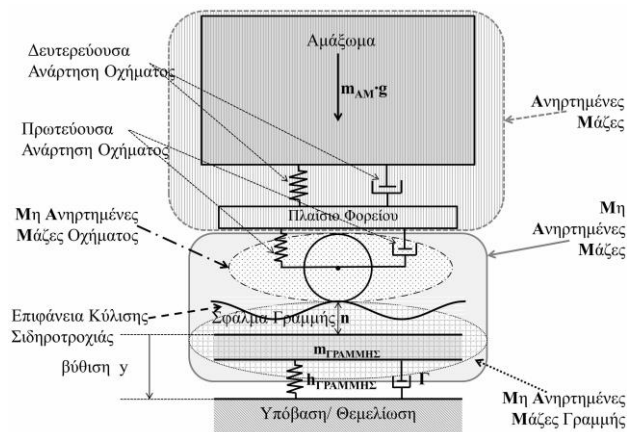
ε. Η αντίδραση R_2 ίση με τον συντελεστή/σταθερά απόσβεσης c_i επί την πρώτη παράγωγο της βύθισης $u(x)$ του Κ.Β. του οχήματος.

Στην πράξη, η κυκλοφορία του οχήματος στη σιδηροδρομική Γραμμή διαφέρει σημαντικά από αυτό το απλοποιημένο μοντέλο, αφού η σιδηροδρομική Γραμμή δεν είναι ανυποχώρητη και το όχημα διαθέτει Ανηρημένες (AM) και Μη-Ανηρημένες (MAM) Μάζες όπως περιγράφεται στη συνέχεια. Η συμπεριφορά των MAM (που βρίσκονται κάτω από την πρωτεύουσα ανάρτηση του οχήματος [βλ. Γιαννακός 2012α]) προσεγγίζεται με την Γραμμή να προσομοιώνεται ως ελαστικό μέσον με απόσβεση (Σχήμα 2) και με τον παρατηρητή να ευρίσκεται επί του τροχού. Για την προσομοίωση των AM του οχήματος (που βρίσκονται επάνω από την πρωτεύουσα ανάρτηση του οχήματος), οι δυνάμεις που προκύπτουν από την εξαναγκάζουσα διέγερση που επιβάλλει η επιφάνεια κύλισης της σιδηροτροχιάς –στην πλειονότητα των περιπτώσεων– έχουν μικρή επίδραση στην κύλιση του τροχού, αλλά για τα σφάλματα Γραμμής (πολύ) μεγάλου μήκους κύματος, οι ταλαντώσεις των AM καθίστανται δεσπόζουσες ενώ οι ταλαντώσεις

των ΜΑΜ μειώνονται σημαντικά. Στα μικρού μήκους κύματος σφάλματα Γραμμής η εικόνα αντιστρέφεται μεταξύ ΜΑΜ και ΑΜ.



Σχήμα 1. Σύστημα ‘μάζα-ελατήριο-αποσβεστήρας’.



Σχήμα 2. Όχημα κινούμενο επί της επιφάνειας κύλισης σιδηροτροχιάς: το αμάξωμα οι Ανηρτημένες και οι Μη-Ανηρτημένες Μάζες, η πρωτεύουσα και η δευτερεύουσα ανάρτηση, το σφάλμα Γραμμής η και η βύθιση y κατά τη διέλευση του τροχού του οχήματος.

ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ

Η επιφάνεια κύλισης της σιδηροτροχιάς δεν είναι «τέλεια ευθεία», αλλά έχει σφάλματα υπό τη μορφή ενός τυχαίου κύματος με πλάτος από κλάσμα του χιλιοστού έως μερικά χιλιοστά παριστάμενα με η στο Σχήμα 2. Επί πλέον κατά τη διέλευση του άξονα του οχήματος εμφανίζεται μία βύθιση y (Γιαννακός 2002). Επίσης ένα τμήμα της μάζας Γραμμής συμμετέχει στην κίνηση των ΜΑΜ του οχήματος (Γιαννακός 2012α, Giannakos 2010). Είναι δύσκολο να υπολογίσουμε θεωρητικά την απόκριση στην τυχαία διέγερση που επιβάλλουν οι δεδομένες ανωμαλίες της επιφάνειας κύλισης σιδηροτροχιάς, εκτός εάν το σύστημα είναι γραμμικό και αμετάβλητο. Σ’ αυτήν την περίπτωση το «σήμα εισόδου» μπορεί να καθορισθεί από την φασματική του πυκνότητα (spectral density) από την οποία

μπορεί να υπολογισθεί η φασματική πυκνότητα της απόκρισης. Τα θεωρητικά αποτελέσματα επιβεβαιώνονται από τις πειραματικές μετρήσεις (Alias 1984, σελ.39, 71). Η δευτεροβάθμια διαφορική εξίσωση της κίνησης για την περίπτωση του συστήματος «Σιδηροδρομικό Όχημα-Σιδηροδρομική Γραμμή» γίνεται (Γιαννακός 2002):

$$(m_{\text{MAM}} + m_{\text{ΓΡΑΜΜΗΣ}}) \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} + \Gamma \cdot \frac{dy}{dt} + h_{\text{ΓΡΑΜΜΗΣ}} \cdot y = -m_{\text{MAM}} \cdot \frac{d^2 n}{dt^2} + (m_{\text{MAM}} + m_{\text{AM}}) \cdot g \quad (1)$$

όπου: m_{MAM} =οι MAM του οχήματος σε tonnes-mass, $m_{\text{ΓΡΑΜΜΗΣ}}$ =η μάζα Γραμμής που συμμετέχει στην κίνηση των MAM, m_{AM} =οι AM σε tonnes-mass, Γ =συντελεστής απόσβεσης της Γραμμής, $h_{\text{ΓΡΑΜΜΗΣ}}$ = $\rho_{\text{δυναμικό}}$ =συνολικός συντελεστής δυναμικής δυσκαμψίας της Γραμμής, n =τεταγμένη του σφάλματος της επιφάνειας κύλισης σιδηροτροχιάς, g =επιτάχυνση βαρύτητας, y =βύθιση της Γραμμής,

$$h_{\text{ΓΡΑΜΜΗΣ}} = \rho_{\text{δυναμικό}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2}} \cdot \sqrt[4]{E \cdot J \cdot \frac{\rho_{\text{ολικό}}}{\ell}} \quad (2)$$

όπου E, J το μέτρο ελαστικότητας και η ροπή αδρανείας της (χαλύβδινης) σιδηροτροχιάς, ℓ =απόσταση των στρωτήρων, και

$$\frac{1}{\rho_{\text{ολικό}}} = \frac{1}{\rho_{\text{σιδηροτροχιάς}}} + \frac{1}{\rho_{\text{υποθέματος}}} + \frac{1}{\rho_{\text{στρωτήρα}}} + \frac{1}{\rho_{\text{σκόρου}}} + \frac{1}{\rho_{\text{υποστρώματος}}} \quad (3)$$

ρ_i =συντελεστής στατικής δυσκαμψίας των «στρώσεων» της Γραμμής, οιοι ελατηριακές σταθερές των στρώσεων και $\rho_{\text{ολικό}}$ =συνολικός συντελεστής στατικής δυσκαμψίας της Γραμμής.

Η επίλυση της (1) [αναλυτικά στα Γιαννακός, (2013), (2016)· Γιαννακός (2002)] καταλήγει στις συναρτήσεις της διακύμανσης, της τυπικής απόκλισης και της φασματικής πυκνότητας ισχύος της δυναμικής συνιστώσας του δρώντος Φορτίου. Για να συσχετισθεί η δυναμική συνιστώσα του Φορτίου με τα σφάλματα Γραμμής χρησιμοποιείται η αναλυτική μορφή του φάσματος των σφαλμάτων κατά μήκος της Γραμμής, από το οποίο είναι δυνατόν να υπολογισθεί η διασπορά και η μέση τυπική απόκλιση της δυναμικής συνιστώσας του Φορτίου επί της Γραμμής. Όλα τα αποτελέσματα των μετρήσεων επί Γραμμής στο Γαλλικό σιδηροδρομικό δίκτυο δείχνει ότι το φάσμα των σφαλμάτων κατά μήκος της Γραμμής έχει τη μορφή (SNCF 1981, Prud'homme 1970):

$$S_n(\Omega) = \frac{A}{(B + \Omega)^3} \quad (4)$$

όπου A, B συντελεστές και Ω η συνάρτηση που προκύπτει από την κυκλική συχνότητα ω με εφαρμογή του μετασχηματισμού Fourier (Giannakos 2013, 2016). Διακρίνονται δύο περιπτώσεις, ανάλογα με το μήκος κύματος των σφαλμάτων Γραμμής.

ΣΦΑΛΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΗΣ ΒΡΑΧΕΟΣ ΜΗΚΟΥΣ ΚΥΜΑΤΟΣ

Για σφάλματα Γραμμής μικρού μήκους κύματος (όπως είναι η κυματοειδής φθορά, με μήκος κύματος μερικών εκατοστών), συνεπώς μεγάλου Ω , ο όρος B είναι αμελητέας επίδρασης και μπορεί να παραληφθεί, οπότε:

$$\omega \cdot t = \frac{2\pi Vt}{\lambda} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot V \Rightarrow \omega = \Omega \cdot V \quad (5)$$

και η (4) γίνεται:

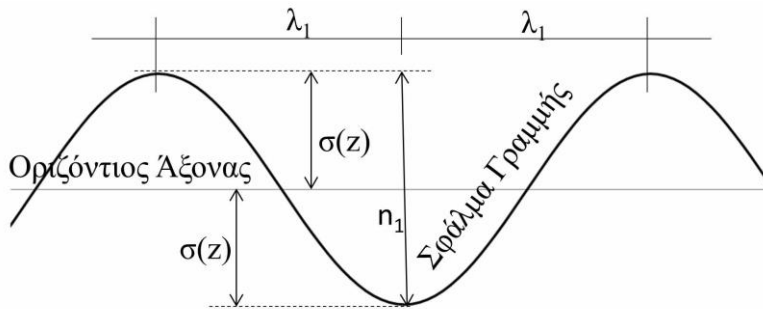
$$S_n(\Omega) = \frac{A}{\Omega^3} = \frac{A}{\frac{1}{V^3} \cdot \omega^3} = \frac{A \cdot V^3}{\omega^3} \quad (6).$$

Η διασπορά των κατακόρυφων επιταχύνσεων που προκύπτουν από αυτό το φάσμα σφαλμάτων Γραμμής, αποδεικνύεται ότι δίδεται από την εξίσωση (Giannakos 2013, 2016) [όπου Γ ο συντελεστής απόσβεσης της Γραμμής]:

$$\sigma^2(\gamma) = \frac{AV^2\omega_n^2}{2\pi} \left[\frac{1+4\zeta^2 p}{q} \cdot \left[\arctan \frac{f-p}{q} \right]_{\frac{\omega_n}{\omega_n}}^{\frac{\omega_n}{\omega_n}} + 2\zeta^2 \cdot \ln \left[(f-p)^2 + q^2 \right]_{\frac{\omega_n}{\omega_n}}^{\frac{\omega_n}{\omega_n}} \right] \quad (7)$$

όπου:

$$f = \beta^2 = \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2, \quad p = 1 - 2\zeta^2, \quad q^2 = 4\zeta^2(1 - \zeta^2), \quad \zeta = \frac{\Gamma}{2\omega_n m_{NSM}} \quad (8)$$



Σχήμα 3. Ένα σφάλμα της επιφάνειας κύλισης σιδηροτροχιάς, μήκους κύματος $\lambda=2\lambda_1$ και τυπικής απόκλισης $\sigma(z)$. Η τεταγμένη του σφάλματος $\eta_1=2 \cdot \sigma(z)$.

Η εξίσωση (7) μπορεί να υπολογισθεί για διάφορες πραγματικές τιμές παραμέτρων της Γραμμής. Ως παράδειγμα λαμβάνουμε: $\zeta=0,30$ και $\zeta=0,35$. το κλάσμα ω_n/ω είναι πεπερασμένο με δεσπόζουσα τιμή 0,67 (Prud'homme 1969, σελ.36-37 και SNCF 1981, σελ.30). $m_{MAM} = 1,5$ t' επιδομή αποτελούμενη από σιδηροτροχιές τύπου UIC60, στρωτήρες σκυροδέματος με συνδέσμους W14 που φέρουν υποθέματα Zw700 Saargummi οπότε $\eta_{\Gamma\text{ΡΑΜΜΗΣ}}$ κυμαίνεται από 60 έως 90 kN/mm, και επιλέγουμε 70 kN/mm. $\lambda_1=6$ mm (Prud'homme 1970) και $V=200$ km/h, A προσδιορίζεται σε κάθε τμήμα γραμμής [π.χ: $A=2,1 \cdot 10^{-6}$ για το τμήμα "Les Aubrais – Vierzon" στη Γαλλία (Prud'homme 1970)].

$$\sigma^2(\gamma) = 8,44 \cdot \frac{AV^2 \omega_n^2}{2\pi} = 1,3433 \cdot AV^2 \cdot \frac{h_{\text{ΓΡΑΜΜΗΣ}}}{m_{\text{ΜΑΜ}}} \quad (9)$$

$$\sigma^2(\Delta Q_{\text{ΜΑΜ}}) = m_{\text{ΜΑΜ}}^2 \cdot \sigma^2(\gamma) = \left(\underbrace{1,3433 \cdot A}_{k_a^2} \right) \cdot V^2 \cdot m_{\text{ΜΑΜ}} \cdot h_{\text{ΓΡΑΜΜΗΣ}} = k_a \cdot V \cdot \sqrt{m_{\text{ΜΑΜ}} \cdot h_{\text{ΓΡΑΜΜΗΣ}}} \quad (10\alpha)$$

Είναι προφανές ότι στον αριθμητικό υπολογισμό της τυπικής απόκλισης $\sigma(\gamma)$ των κατακόρυφων επιταχύνσεων υπεισέρχεται το φάσμα των σφαλμάτων Γραμμής. Η εξίσωση (10α) γίνεται:

$$\begin{aligned} \sigma(\Delta Q_{\text{ΜΑΜ}}) [\text{kN}] &= \underbrace{\frac{10 \cdot 0,3 \cdot k_1}{200 \cdot \sqrt{1,7804 \cdot 75}}}_{k_a} \cdot V \left[\frac{\text{km}}{\text{h}} \right] \cdot \sqrt{m_{\text{ΜΑΜ}} [\text{t}] \cdot h_{\text{ΓΡΑΜΜΗΣ}} \left[\frac{\text{kN}}{\text{mm}} \right]} = \quad (10\beta) \\ &= \underbrace{k_1 \cdot \sqrt{A_1}}_{k_a} \cdot V \left[\frac{\text{km}}{\text{h}} \right] \cdot \sqrt{m_{\text{ΜΑΜ}} [\text{t}] \cdot h_{\text{ΓΡΑΜΜΗΣ}} \left[\frac{\text{kN}}{\text{mm}} \right]} \end{aligned}$$

Πίνακας 1. Τιμές των k_1 και k_a , για $\sigma(\Delta Q_{\text{ΜΑΜ}})$ σε [kN] (Γιαννακός 2012β).

	Επιφάνεια κύλισης σιδηροτροχιάς τροχισμένη			Επιφάνεια κύλισης σιδηροτροχιάς μη τροχισμένη		
	min	μέσον	max	min	μέσον	max
$k_1 =$	3	4,5	6	6	9	12
$k_a =$	$3,89 \cdot 10^{-3}$	$5,84 \cdot 10^{-3}$	$7,79 \cdot 10^{-3}$	$7,79 \cdot 10^{-3}$	$11,68 \cdot 10^{-3}$	$15,58 \cdot 10^{-3}$

Υπολογίζεται ότι (Giannakos 2013, 2016) η διακύμανση τεταγμένης σφάλματος από 0,44 mm έως 1,75 mm για χορδή 3 m καλύπτει πιθανότητα μη-υπέρβασης 99,7% ενώ από 0,29 έως 1,17 mm καλύπτει 95,5%. Η εξίσωση (10β) μπορεί να συσχετισθεί με την τεταγμένη του σφάλματος Γραμμής, σε μονάδες του συστήματος SI:

$$\sigma(\Delta Q_{\text{ΜΑΜ}}) = \underbrace{k_1 \cdot \sqrt{A_1}}_{k_a} \cdot \frac{\sqrt{A_1} \cdot 0,986}{0,15} \cdot V \cdot \sqrt{m_{\text{ΜΑΜ}} \cdot h_{\text{ΓΡΑΜΜΗΣ}}} = \sqrt{A_1} \cdot \frac{n_1}{0,15} \cdot V \cdot \sqrt{m_{\text{ΜΑΜ}} \cdot h_{\text{ΓΡΑΜΜΗΣ}}} \quad (10\gamma)$$

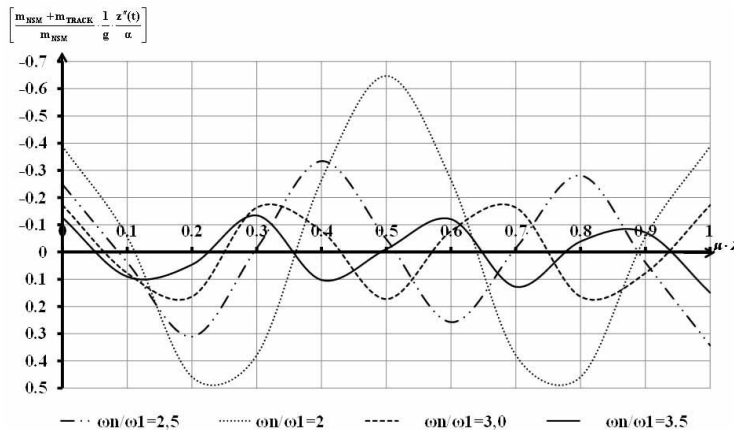
όπου n_1 σε [mm] η τεταγμένη του σφάλματος Γραμμής μετρημένη επί μιας χορδής 3 m σε δύο διαδοχικές κορυφές του σφάλματος (Σχήμα 3), V η ταχύτητα, $m_{\text{ΜΑΜ}}$ οι Μη-Ανηρητημένες Μάζες του οχήματος και $h_{\text{ΓΡΑΜΜΗΣ}}$ ο συντελεστής συνολικής δυναμικής δυσκαμψίας της Γραμμής, $\sqrt{A_1} = 0,147776 \cdot 10^{-3}$. Για $h_{\text{ΓΡΑΜΜΗΣ}} = 8$ t/mm, $M_{\text{ΑΜ}} = 1,5$ t και $\zeta = 0,3$ τότε $\Delta Q_{\text{ΜΑΜ}} = 5,66$ t ανά mm τεταγμένης σφάλματος Γραμμής, για 99,7% πιθανότητα μη υπέρβασης.

Θα πρέπει βέβαια να διερευνηθεί η επιρροή και των μεγάλου κύματος σφαλμάτων Γραμμής οπότε και η παράμετρος B παραπάνω, δεν είναι αμελητέα. Στα Giannakos (2016a; 2013) παρουσιάζεται ανάλυση με διαγράμματα για τη συσχέτιση μεταξύ μήκους κύματος σφαλμάτων και βύθισης $y=z(x)$ συνεπώς και της κατακόρυφης επιτάχυνσης $y''=z''(x)$ η οποία επηρεάζει τις MAM (και τη δυναμική συνιστώσα του δρώντος φορτίου αφού **Δύναμη=Μάζα x Επιτάχυνση**). Αποδεικνύεται ότι (Giannakos ό.π.):

$$\left[\frac{(m_{MAM} + m_{ΓΡΑΜΜΗΣ})}{m_{MAM}} \cdot \frac{z''(t)}{\alpha} \right] = - \left(\frac{2\pi}{n \cdot T_n} \right)^2 \cdot \frac{1}{g} \cdot \left[\frac{1}{2 \cdot [1 - (n)^2]} \cdot \left[\underbrace{\cos(2\pi\mu)}_{\text{steady-state}} - \underbrace{(n)^2 \cdot \cos(2n\pi\mu)}_{\text{transient-part}} \right] \right] \quad (11)$$

όπου το αποτέλεσμα προκύπτει ως ποσοστό % του g , $n = \omega_n / \omega_1 = T_1 / T_n$, $T_n = 2\pi / \omega_n = \eta$ περίοδος της ελεύθερης ταλάντωσης του κυλιόμενου τροχού επί της σιδηροτροχιάς, $T_1 = 2\pi / \omega_1 = \theta$ απαιτούμενος χρόνος για να διατρέξει ο τροχός ένα σφάλμα μήκους κύματος λ , $\omega_1 = \lambda / V$, $V = \text{ταχύτητα}$, $\mu = \text{ποσοστό του μήκους κύματος } \lambda [0, 0.1, 0.2, \dots, 0.8, 0.9, 1]$, $\alpha = \text{το εύρος του βάθους του σφάλματος από την (ευθύγραμμη) επιφάνεια κύλισης [προκύπτουν από τις καταγραφές σφαλμάτων]}$.

Σε μία αριθμητική εφαρμογή (Giannakos 2016a), για $V = 200 \text{ km/h} = 55,56 \text{ m/sec}$, $h_{ΓΡΑΜΜΗΣ} = 80 \cdot 10^6 \text{ N/m}$ and $m_{MAM} = 1500 \text{ kg}$, τότε $\sigma(\Delta Q) = 32,96 \text{ kN}$ ή $3,296 \text{ t}$ για $99,7\%$ πιθανότητα μη υπέρβασης [3 φορές η τυπική απόκλιση] και $\zeta = 0,3$ προκύπτει ότι η δυναμική συνιστώσα του δρώντος φορτίου λόγω MAM είναι $\Delta Q = 5,66 \text{ t}$ για κάθε mm τεταγμένης του σφάλματος Γραμμής. Στο Σχήμα 4 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της ανάλυσης ευαισθησίας, ειδικά για την περίπτωση σφαλμάτων μεγάλου μήκους κύματος ($\omega_n / \omega_1 = 2, 2,5, 3, 3,5$ στον οριζόντιο άξονα εμφανίζονται οι τιμές του μ) σε σχέση με την κατακόρυφη επιτάχυνση $z''(t)$ (ως ποσοστό της επιτάχυνσης βαρύτητας g) πολλαπλασιασμένης επί την σταθερά $[(m_{NSM} + m_{TRACK}) / (m_{NSM} \cdot a)]$:

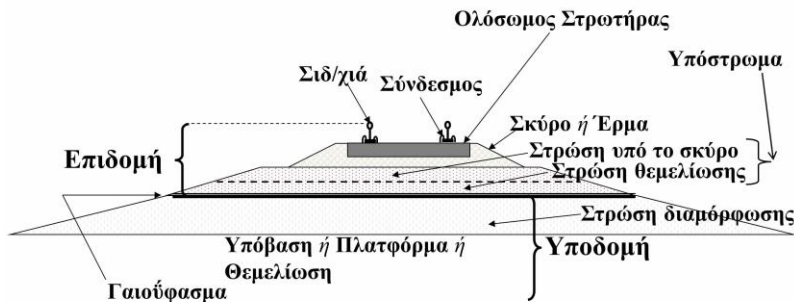


Σχήμα 4. Κατακόρυφη επιτάχυνση των MAM σε σχέση με το μήκος κύματος [για μεγάλα μήκη κύματος μόνον]: (Giannakos 2017).

Στο Σχήμα 4 παρατηρούμε ότι για μήκη κύματος, τα οποία επιφέρουν κυκλικές συχνότητες μεγαλύτερες από το διπλάσιο της ιδιοσυχνότητας του τροχού, η κατακόρυφη επιτάχυνση των ΜΑΜ γίνεται πολύ μικρή, σχεδόν αμελητέα (όπως και η δυναμική συνιστώσα λόγω ΜΑΜ του δρώντος φορτίου), σε σύγκριση με τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στα Giannakos [2016a; 2013], για μικρότερες τιμές του κλάσματος ω_n/ω_1 (0,5 έως 2). Στην περίπτωση λοιπόν των μεγάλου μήκους κύματος σφαλμάτων, η επίδραση των ΑΜ θα πρέπει να (συν-)εξετασθεί.

ΣΦΑΛΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΗΣ ΜΕΓΑΛΟΥ ΜΗΚΟΥΣ ΚΥΜΑΤΟΣ

Εάν υποθέσουμε ότι τα σφάλματα στις δύο σιδηροτροχιές –σε μία τυχούσα διατομή της Γραμμής (Σχήμα 5)– είναι εντελώς ίδια κατά την ίδια χρονική στιγμή και παρουσιάζουν την ίδια φάση, ή εάν εξετάζουμε την τροχιά του ενός τροχού, τότε τα συμπεράσματα στα οποία θα καταλήξουμε μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε πιο σύνθετες περιπτώσεις κυκλοφορούντων, σε κίνηση αμαξωμάτων κ.λπ.. Επί πλέον εάν θεωρήσουμε το απλοποιημένο μονόροφο μοντέλο του Σχήματος 1 ‘μάζα-ελατήριο-αποσβεστήρας’ κυλιομένου επί μιας επιφάνειας κύλισης σιδηροτροχιάς, μπορούμε να υπολογίσουμε την $s_E(\omega)$, φασματική πυκνότητα ισχύος της εξόδου (τροχού), από την $s_v(\omega)$, φασματική πυκνότητα ισχύος της εισόδου (επιφάνεια κύλισης σιδηροτροχιάς) περνώντας από το σφάλμα n στο $n+Z$, όπου Z η μετασχηματισμένη κατά Fourier της βύθισης y (Σχήμα 2) [Giannakos 2017]:



Σχήμα 5. Τυπική εγκάρσια διατομή (σκυρο-)γραμμής.

$$s_E(\omega) = |B(\omega)|^2 \cdot s_v(\omega) \Rightarrow s_E(\omega) = \frac{1 + 4\zeta^2 \cdot \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}{\left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right]^2 + 4\zeta^2 \cdot \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \cdot \frac{AV^2}{\underbrace{(BV + \omega)^3}_{s(\omega)}} \quad (12)$$

Από την εξίσωση (11), προκύπτει η διασπορά της κατακόρυφης επιτάχυνσης $s_\gamma(\omega)$, με δύο σημεία μεγίστου, όπως παρουσιάζεται σχηματικά στο Σχήμα 6.

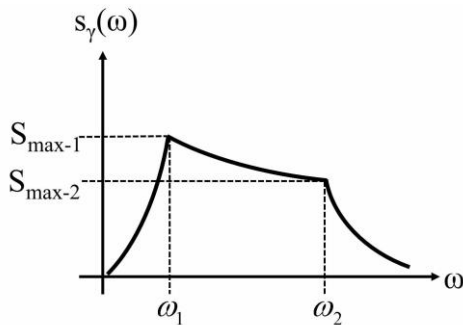
$$s_{\gamma}(\omega)_{\max-1} = \omega_n^4 \cdot \frac{AV^2}{(BV + \omega_n)^3} \cdot \left(\frac{1}{4\zeta'^2} + 1 \right) \cdot \frac{1 + 4\zeta'^2 \cdot \left(\frac{\omega_n}{\omega_n'} \right)^2}{\underbrace{\left(1 - \left(\frac{\omega_n}{\omega_n'} \right)^2 \right)^2 + 4\zeta'^2 \cdot \left(\frac{\omega_n}{\omega_n'} \right)^2}_{\text{Term-B}}} \quad (12a)$$

$$s_{\gamma}(\omega)_{\max-2} = AV^2 \cdot \left(\frac{1}{4\zeta'^2} + 1 \right) \cdot 4\zeta'^2 \frac{\omega_n'^2}{\omega_n} \quad (12b)$$

Η τυπική απόκλιση της κατακόρυφης επιτάχυνσης και της δυναμικής συνιστώσας του δρώντος φορτίου λόγω AM, δίδεται από:

$$\sigma(\gamma)^2 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\infty} s_{\gamma}(\omega) \cdot d\omega \Rightarrow \sigma^2(\Delta Q_{AM}) = m_{AM}^2 \cdot \sigma^2(\gamma) \quad (13)$$

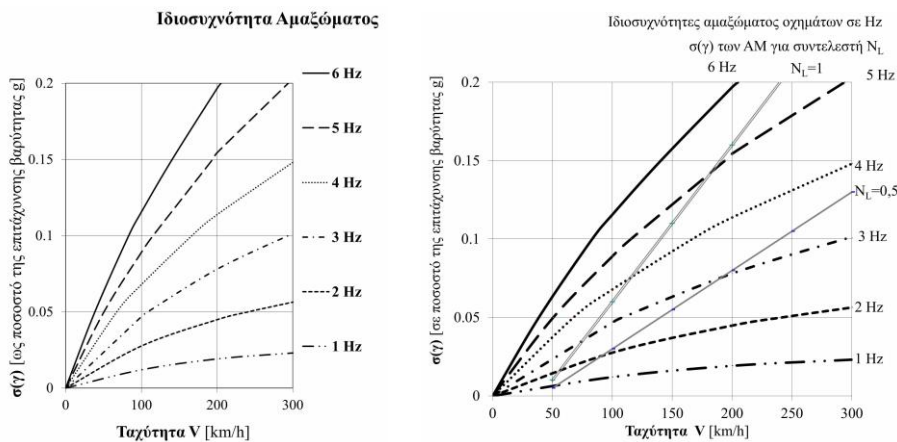
που συνδέει τα σφάλματα Γραμμής -το φάσμα των, κατά μήκος της Γραμμής, σφαλμάτων Γραμμής υπό τη μορφή $S_n(\omega)$, $S_n(\Omega)$, εξίσ. (6)- με την κίνηση των AM.



Σχήμα 6. Απεικόνιση της συνάρτησης διασποράς της κατακόρυφης επιτάχυνσης σε σχέση με τις κυκλικές συχνότητες ‘εισόδου’ δηλαδή της επιφάνειας κύλισης σιδηροτροχιάς.

Είναι προφανές ότι η διασπορά $s_{\gamma}(\omega)$ και η τυπική απόκλιση $\sigma(\gamma)$ είναι συναρτήσεις και του αντιστρόφου της κυκλικής ιδιοσυχνότητας ω_n της Γραμμής δηλαδή του συντελεστή στατικής (ΡΓΡΑΜΜΗΣ) ή/και της δυναμικής (ΗΓΡΑΜΜΗΣ) δυσκαμψίας της Γραμμής. Σε συνθήκες πραγματικής κυκλοφορίας οι Γαλλικοί σιδηρόδρομοι (SNCF), μέτρησαν την τυπική απόκλιση $\sigma(\gamma)$ των κατακόρυφων επιταχύνσεων [ως ποσοστού του g] λόγω των AM των οχημάτων, σε συνάρτηση με την ταχύτητα κυκλοφορίας (Σχήμα 7-Αριστερά) [Alias 1984· Prud’homme 1970]. Οι μετρήσεις της $\sigma(\gamma)$ έγιναν για κυμαινόμενες (πραγματικές, όχι σταθερές) τιμές του ρυποδομής and ρΓραμμής, και δίδονται ως γενικής ισχύος. Περισσότερο αναλυτικά, το συζευγμένο σύστημα «αμάξωμα-φορείο-άξονας» (σύστημα διώροφο) παρουσιάζει ιδιοσυχνότητα, την ίδια με την του άξονα επί

γραμμής, περίπου 30-40 Hz, εξασθενούμενη, αντιστοιχούσα στα σφάλματα Γραμμής τα οποία αποκτούν μεγαλύτερη σπουδαιότητα όταν η ταχύτητα «επιφέρει» συχνότητες πολύ κοντινές στη συχνότητα του παραπάνω συζευγμένου συστήματος. Αυτή η χαμηλή συχνότητα του συστήματος «αμάξωμα-φορείο-άξονας», που κυρίως επηρεάζει το αμάξωμα και είναι ιδιαίτερα ενδιαφέροντα για την παρούσα ανάλυσή μας, είναι περίπου 1 Hz για επιβατικά βαγόνια και υψηλότερη για εμπορευματικά (βλ. σχετικά Alias 1987, σελ. 47). Η μέτρηση αυτή συνεπάγεται ότι η καμπύλη για ιδιοσυχνότητα 1Hz αντιπροσωπεύει τα επιβατικά βαγόνια και οι υψηλότερες ιδιοσυχνότητες αντιπροσωπεύουν τα εμπορευματικά βαγόνια, που κυκλοφορούν με χαμηλότερες ταχύτητες.



Σχήμα 7. (Αριστερά) Τυπική απόκλιση κατακορύφων επιταχύνσεων $\sigma(\gamma)$ σε σχέση με την ταχύτητα κυκλοφορίας V και την ιδιοσυχνότητα του αμαξώματος σιδηροδρομικών οχημάτων, όπως προέκυψε από μετρήσεις επί γραμμής [Alias 1984· Prud'homme 1970]. (Δεξιά) οι καμπύλες του αριστερά σχήματος με την εξίσωση (14) για N_L 0,5 και 1.

Από την παραπάνω ανάλυση –για το συζευγμένο σύστημα «αμάξωμα-φορείο-άξονας»– προκύπτει σαφώς ότι τελικά στην κίνηση αυτού του συζευγμένου συστήματος με ιδιοσυχνότητα 1 Hz, συμμετέχουν όλα τα μέρη του οχήματος, άρα οι εξισώσεις μπορούν να προσεγγισθούν με τη χρήση του συνολικού $Q_{\text{Τροχού}}$ αντί των m_{AM} . Συνεπώς, θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ένας προσεγγιστικός τύπος για τον υπολογισμό της διασποράς αυτού του τμήματος της δυναμικής συνιστώσας του δρώντος φορτίου (που οφείλεται στις AM) [Γιαννακός 2002; SNCF 1981):

$$\sigma(\Delta Q_{AM}) = \frac{V - 40}{1000} \cdot N_L \cdot Q_{\text{Τροχού}} \quad (14)$$

όπου: $Q_{\text{Τροχού}}$ είναι το στατικό φορτίο του τροχού, V η ταχύτητα κυκλοφορίας (εκμετάλλευσης), και ο συντελεστής N_L είναι η μέση τυπική απόκλιση της κατάστασης γραμμής κατά το μήκος της, σε ένα τμήμα περίπου 300 m μήκους, και για τις δύο σιδηροτροχιές που κυμαίνεται μεταξύ 0,5–1,5 mm ή περισσότερο

(βλ. SNCF 1981; Janin 1982, p.335–336)· για το Ελληνικό δίκτυο ο συντελεστής N_L εκτιμάται μεταξύ 1 και 1,5 κυρίως (Γιαννακός 2002, 2012β).

Λεπτομερέστερα, ο συντελεστής N_L , είναι ο μέσος όρος του σήματος όπως προκύπτει από την καταγραφή (ανεπεξεργαστο και αφιλτράριστο) επί μιας βάσης (μέτρησης) περίπου 300 m για τα κατακόρυφα και οριζόντια σφάλματα των δύο σιδηροτροχιών, δηλαδή είναι η συνέλιξη (convolution):

$$N_L(x_0) = \frac{1}{300} \int_{-\infty}^{+\infty} \eta l(x) e^{\left(\frac{x-x_0}{300}\right)} dx \quad (15)$$

όπου $\eta l(x)$ είναι η τιμή του πραγματικού σήματος (της καταγραφής): πρακτικά είναι ένας σταθμισμένος δείκτης, μέσος όρος, ο οποίος «συνθλίβει» λιγότερο τα μεμονωμένα σφάλματα από έναν κλασικό μέσον όρο και προσομοιάζει σε αδρές γραμμές προς την «μνήμη» του οχήματος (βλ. σχετικά Janin 1982). Στο Σχήμα 7-Δεξιά απεικονίζονται οι καμπύλες που συνδέουν την τυπική απόκλιση των κατακόρυφων επιταχύνσεων $\sigma(\gamma)$ με την μέγιστη ταχύτητα εκμετάλλευσης και την ιδιοσυχνότητα του οχήματος –όπως μετρήθηκαν από τους Γαλλικούς σιδηροδρόμους (SNCF)- και ταυτόχρονα η εξίσωση (14) για δύο τιμές του N_L : 0.5 και 1. Η προσέγγιση είναι ικανοποιητική. Είναι ήδη γνωστό ότι (Γιαννακός 2002) η τυπική απόκλιση της συνολικής δυναμικής συνιστώσας του δρώντος φορτίου δίδεται από τον ακόλουθο τύπο:

$$\sigma(\Delta Q_{\text{Δυναμική-Ολική}}) = \sqrt{\sigma^2(\Delta Q_{\text{MAM}}) + \sigma^2(\Delta Q_{\text{AM}})} \quad (16)$$

και ανάλογα με την πιθανότητα μη υπέρβασης λαμβάνεται η διπλάσια (95,5%) ή τριπλάσια (99,7%) τυπική απόκλιση της δυναμικής συνιστώσας του δρώντος φορτίου και προστίθεται στη στατική και ημι-στατική συνιστώσα.

Θα πρέπει να τονισθεί ότι: μετά από πειραματικές και επί γραμμής έρευνες οι Eisenmann και Mattner (1984) ανέφεραν ότι η θεωρητική βύθιση της Γραμμής είναι η ίδια όπως οι μετρούμενες επί γραμμής. Ο καθηγητής Eisenmann (1980, 1988· βλ. σχετικά και Giannakos 2011) βεβαιώνει επίσης ότι οι θεωρητικοί υπολογισμοί για τη διαστασιολόγηση της επιδομής αντιστοιχούν προς τον μέσον όρο των τιμών των μετρήσεων επί γραμμής.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στο παρόν άρθρο παρουσιάστηκε η δευτεροβάθμια διαφορική εξίσωση της κίνησης για μία σιδηροδρομική Γραμμή, με ένα όχημα να κυκλοφορεί επ' αυτής. Εξετάστηκε η επιρροή των σφαλμάτων Γραμμής και διαχωρίστηκαν δύο περιπτώσεις: η περίπτωση των μικρού μήκους κύματος σφαλμάτων οπότε οι Μη Ανηρτημένες Μάζες (MAM) παίζουν κυρίαρχο ρόλο, και η περίπτωση των μεγάλου μήκους κύματος σφαλμάτων οπότε οι Ανηρτημένες Μάζες (AM) επηρεάζουν σημαντικά τη δυναμική συνιστώσα του δρώντος φορτίου.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Alias, J., «La Voie Ferree–Techniques de Construction et Entretien», 2me edition, Eyrolles, Paris (1984).

Eisenmann, J., “Schotteroberbau: Moglichkeiten und Perspektiven fur die Moderne Bahn”. Giesel-Verlag, Isernhagen, Germany (1988).

Eisenmann, J., “Verjormungsverhalten der Schiene. Auswirkungen auf die Oberbaubeanspruchung, Lagestabilitat und Störungsfunktion”. ZEV- Glasers Annalen, Berlin (1980) 37–41.

Eisenmann, J., & Mattner, L., “Auswirkung der Oberbaukonstruktion auf die Schotter und Untergrundbeanspruchung”. Eisenbahningenieur, Vol. 35, No 3, (1984) 99–107.

Giannakos, K., “Theoretical calculation of the track-mass in the motion of unsprung masses in relation to track dynamic stiffness and damping”, IJPE, Special Issue High-Speed Railway Infrastructure: Recent Developments and Performance (2010) 319-330.

Giannakos, K., “Track Maintenance of Heavy Haul Railways with Resilient Versus Stiff Fastenings”, TRR (2011) 155-162.

Giannakos, K., “Track Defects and the Dynamic Loads due to Non-Suspended Masses of Railway Vehicles”, NAUN Intl Journal of Mechanics, Vol. 7, Is. 3, (2013) 180-191.

Giannakos, K., “Modeling the Influence of Short Wavelength Defects in a Railway Track on the Dynamic Behavior of the Non-Suspended Masses”, Journal of Mech. Syst. and Signal Proc., Elsevier, Vol. 68-69 (2016a) 68-83.

Giannakos, K., “Second Order Differential Equation of Motion in Railways: the Variance of the Dynamic Component of Actions due to the Sprung Masses of the Vehicles”, International Journal of Theoretical and Applied Mechanics (2016b) 30-37.

Giannakos, K., “Track Defects and the Dynamic Loads due to Suspended (Sprung) Masses of Railway Vehicles, BCRRA2017, Athens-Greece, June 28-30, proceedings, Taylor & Francis group (2017) 1911-1919.

Janin, G., “La Maintenance de la Geometrie de la Voie”, RGCF, Juin (1982) 331–346.

Prud’Homme, A., “La Voie”, RGCF, Janvier (1970), extrait de RGCF.

Prud’Homme, A., “Sollicitations Statiques et Dynamiques de la Voie”, SNCF, Direction des Installations Fixes, R. 0800 – 66 – 03 (1969).

SNCF/Direction de l’ Equipement, “Mecanique de la Voie”, Paris (1981).

Γιαννακόσ, Κ., «Επιρροή της Απόσβεσης της Γραμμής στη Μάζα Γραμμής που Συμμετέχει στην Κίνηση των Μη Ανηρτημένων Μαζών των Σιδηροδρομικών Οχημάτων», Τιμητικός Τόμος για τον Καθηγητή Γεώργιο Α. Γιαννόπουλο, ΑΠΘ, Θεσσαλονίκη (2012^α) 81-94.

Γιαννακόσ, Κ., «Επιλεγμένα Θέματα Σιδηροδρομικής», Πανεπ. Θεσσαλίας, Σχ. Πολιτικών Μηχανικών, <http://giannakoskonstantinos.com/wp>, (2012β).

Γιαννακόσ, Κ., «Δράσεις στη Σιδηροδρομική Γραμμή», Παπαζήσης, Αθήνα, (2002).