

# Σχεδιασμός Κελυφών από Τσιμεντοειδή Υλικά Έναντι Λυγισμού Buckling Design of Thin Cementitious Shells

Απόστολος ΚΟΥΚΟΥΣΕΛΗΣ<sup>1</sup>, Απόστολος ΓΡΑΜΜΑΤΟΠΟΥΛΟΣ<sup>2</sup>,  
Ευριπίδης ΜΥΣΤΑΚΙΔΗΣ<sup>3</sup>

Εργαστήριο Ανάλυσης και Σχεδιασμού Κατασκευών, Τμήμα Πολιτικών  
Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, Βόλος, Ελλάδα

*Λέξεις κλειδιά: Τσιμεντοειδή κελύφη, Ικανότητα λυγισμού, Μη γραμμική ανάλυση,  
Reinforced cementitious shells, Buckling capacity, Nonlinear analysis*

**ΠΕΡΙΛΗΨΗ :** Οι εξελίξεις στον τομέα της τεχνολογίας υλικών υψηλής επιτελεστικότητας δίνουν την δυνατότητα κατασκευής λεπτών τσιμεντοειδών κελυφών, τα οποία είναι επιρρεπή σε φαινόμενα λυγισμού. Για τον σχεδιασμό τους, μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι συστάσεις της διεθνούς ένωσης χωρικών και κελυφωτών κατασκευών (International Association of Shell and Spatial Structures - IASS), οι οποίες όμως δεν είναι συμβατές με το σύγχρονο Ευρωπαϊκό κανονιστικό πλαίσιο των Ευρωκωδίκων. Στην περίπτωση των μεταλλικών κελυφών, ο Ευρωκώδικας 3 παρέχει μια απλοποιημένη μεθοδολογία υπολογισμού, μέσω των γνωστών καμπυλών ικανότητας λυγισμού. Στόχος της παρούσας εργασίας είναι η διερεύνηση της δυνατότητας εφαρμογής μιας μεθοδολογίας σχεδιασμού τσιμεντοειδών κελυφών που να ακολουθεί τις αρχές πάνω στις οποίες βασίστηκε η μεθοδολογία που εφαρμόζεται στην περίπτωση των μεταλλικών κελυφών του Ευρωκώδικα 3 (EN1993-1-6).

**ABSTRACT :** High performance cementitious materials have made possible the construction of slender thin cementitious shells. For their design, the most relevant recommendations are those provided by the International Association of Shells and Spatial Structures (IASS), which, however, are inconsistent with the modern European design framework. In the case of steel shells, Eurocode 3 provides a simplified design approach based on the well-known buckling capacity curves. The aim of this paper is the investigation of the feasibility of a methodology for the buckling design of cementitious shells which is based on the principals on which the methodology of the design of steel shells was developed.

---

<sup>1</sup> Δρ. Πολιτικός Μηχανικός, Εργαστήριο Ανάλυσης και Σχεδιασμού Κατασκευών, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, email: [akoukouselis@gmail.com](mailto:akoukouselis@gmail.com)

<sup>2</sup> Πολιτικός Μηχανικός, Αθήνα, email: [apogrammatopoulos@gmail.com](mailto:apogrammatopoulos@gmail.com)

<sup>3</sup> Καθηγητής, Εργαστήριο Ανάλυσης και Σχεδιασμού Κατασκευών, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, email: [emistaki@uth.gr](mailto:emistaki@uth.gr)

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα κελύφη χρησιμοποιούνται συχνά σε δομικές εφαρμογές και ιδιαίτερα σε κατασκευές επιστέγασης όπου απαιτείται η κάλυψη μεγάλων ανοιγμάτων. Άλλες ενδεικτικές εφαρμογές των τσιμεντοειδών κελυφών αποτελούν τα σιλό, και οι δεξαμενές. Παρόλο που τα τσιμεντοειδή κελύφη γνώρισαν μια περίοδο ανάπτυξης μεταξύ του 1920 και του 1970, μετέπειτα, η χρήση τους άρχισε να φθίνει καθώς ο κατασκευαστικός κλάδος έκανε στροφή σε εναλλακτικά υλικά και συστήματα δόμησης. Από τους βασικούς λόγους αυτής της στροφής είναι η δυσκολία και το αυξημένο κόστος κατασκευής τσιμεντοειδών κελυφών με παραδοσιακές τεχνικές και υλικά. Οι εξελίξεις των τελευταίων δεκαετιών στον τομέα της τεχνολογίας υλικών δίνουν την δυνατότητα αναβίωσης της κατασκευής λεπτών τσιμεντοειδών κελυφών με τη χρήση σύγχρονων μεθόδων κατασκευής και τσιμεντοειδών υλικών υψηλής επιτελεστικότητας. Βέβαια, τα συγκεκριμένα κελύφη είναι επιρρεπή σε φαινόμενα λυγισμού και ο σχεδιασμός τους πρέπει να λάβει υπόψη του φαινόμενα ευστάθειας. Μέχρι τώρα, το μόνο κανονιστικό κείμενο σχετικά με τον σχεδιασμό τσιμεντοειδών κελυφών να είναι οι συστάσεις σχεδιασμού από τη διεθνή ένωση χωρικών και κελυφωτών κατασκευών (IASS, 1979). Η διαδικασία σχεδιασμού αποτελείται από διαδοχικά βήματα απομείωσης του θεωρητικού-ελαστικού φορτίου λυγισμού με τη χρήση συντελεστών, καθέναν από τους οποίους έχει ως στόχο να λάβει υπόψη μια ξεχωριστή πτυχή της συμπεριφοράς της κατασκευής. Η προτεινόμενη σχέση βασίζεται κυρίως στην έρευνα των Dulácska και Kollár (1982, 1995) που εκφράζεται από τη σχέση:

$$P_{cr} = P_{cr}^{lin} \rho_{imp} \rho_{creep} \rho_{crack} \rho_{pl} / \gamma , \quad (1)$$

όπου  $P_{cr}^{lin}$  είναι το ελαστικό κρίσιμο φορτίο,  $\rho_{imp}$  είναι ο συντελεστής αρχικών ατελειών, ο συντελεστής  $\rho_{creep}$  εκφράζει τη μείωση της φέρουσας ικανότητας λόγω του φαινομένου του ερπυσμού, ο συντελεστής  $\rho_{crack}$  εκφράζει τη μείωση λόγω των ρηγματώσεων της διατομής, ο συντελεστής  $\rho_{pl}$  αφορά την επιρροή της πλαστικότητας, ενώ τέλος  $\gamma$  είναι ο συντελεστής ασφαλείας, που συνδέει τη χαρακτηριστική φέρουσα αντοχή με αυτή του σχεδιασμού. Ωστόσο, στοιχεία όπως η έλλειψη μιας σαφώς καθορισμένης μεθόδου μέτρησης ανοχών, η έλλειψη συστάσεων σχετικά με το σχήμα των ατελειών που πρέπει να χρησιμοποιηθούν σε αριθμητικές αναλύσεις καθώς και η χρήση ενός «καθολικού» συντελεστή ασφαλείας αντί για «μερικούς», δημιουργούν ασυμβατότητες με το σύγχρονο Ευρωπαϊκό κανονιστικό πλαίσιο των Ευρωκωδίκων.

Μια εναλλακτική προσέγγιση σχεδιασμού μπορεί να επιτευχθεί με τη χρήση των γενικών διατάξεων του Ευρωκώδικα 2 σχετικά με την ανάλυση δευτέρας τάξεως. Δυστυχώς όμως, οι διατάξεις αυτές δεν παρέχουν μια ολοκληρωμένη μεθοδολογία σχεδιασμού για κελύφη από οπλισμένο σκυρόδεμα. Η αντοχή έναντι λυγισμού μπορεί να προσδιοριστεί μόνο με την εκτέλεση μη γραμμικής ανάλυσης της ατελούς κατασκευής. Ωστόσο, μια τέτοια ανάλυση δεν είναι μόνο δύσκολο να πραγματοποιηθεί, αλλά και τα αποτελέσματα που παράγονται είναι πολλές φορές

δύσκολο να ερμηνευθούν. Για το λόγο αυτό, χρειάζεται να υπάρχουν λύσεις αναφοράς που παράγονται με απλοποιημένες προσεγγίσεις.

Από την άλλη πλευρά, στην περίπτωση των χαλύβδινων κατασκευών που είναι εκ φύσεως ευαίσθητες στο λυγισμό, ο Ευρωκώδικας 3 (EN1993-1-6, 1999) περιλαμβάνει μια μεθοδολογία σχεδιασμού κελυφών διαφόρων γεωμετριών. Ο σχεδιασμός βασίζεται στην γενική καμπύλη ικανότητας, που μπορεί να θεωρηθεί επέκταση των κλασικών καμπυλών λυγισμού που χρησιμοποιούνται για τον σχεδιασμό γραμμικών μελών. Πιο συγκεκριμένα, η καμπύλη ικανότητας συνδέει την αδιάστατη αντοχή  $\chi$  του κελύφους με τη λυγηρότητα της κατασκευής και βασίζεται σε τέσσερις παραμέτρους ( $\lambda_0$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  και  $\eta$ ) που περιγράφουν τους πιθανούς τρόπους αστοχίας τέτοιων κελυφών. Με βάση τα παραπάνω, είναι πρακτικότερο να ακολουθείται μια διαδικασία σχεδιασμού παρόμοια με αυτή του EN1993-1-6, αντί να εφαρμόζονται οι συστάσεις της IASS. Συνεπώς, πρέπει να διερευνηθεί εάν παρόμοιες παράμετροι και εξισώσεις, όπως αυτές που χρησιμοποιούνται για το σχεδιασμό χαλύβδινων κελυφών, μπορούν να χρησιμοποιηθούν και για τον σχεδιασμό τσιμεντοειδών κελυφών.

Στόχος της παρούσας εργασίας είναι η μελέτη της συμπεριφοράς οπλισμένων κελυφών από τσιμεντοειδή υλικά υψηλής επιτελεστικότητας που έχουν σχήμα κυλίνδρου και τμήματος σφαίρας, καθώς και η πρόταση μιας απλοποιημένης μεθόδου υπολογισμού της αντοχής τους, παρόμοιας με αυτήν του Ευρωκώδικα 3 μέρος 1.6. Η διερεύνηση γίνεται με την βοήθεια αριθμητικών προσομοιωμάτων τα οποία μπορούν να λάβουν υπόψη τους τόσο την γεωμετρική όσο και την υλική μη γραμμικότητα, που παίζουν κυρίαρχο ρόλο στη συμπεριφορά των εν λόγω προβλημάτων.

## ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΜΕΤΑΛΛΙΚΩΝ ΚΕΛΥΦΩΝ ΣΥΜΦΩΝΑ ΜΕ ΤΟΝ EN1993-1-6

Όπως προαναφέρθηκε, η προσέγγιση σχεδιασμού του Ευρωκώδικα στην περίπτωση των χαλύβδινων κελυφών, βασίζεται σε μια καμπύλη ικανότητας που περιγράφει τη σχέση μεταξύ της αδιάστατης αντοχής  $\chi$  του κελύφους και της λυγηρότητας  $\lambda$ , που στην απλούστερη μορφή της καθορίζεται από τέσσερις παραμέτρους που αναλύονται στη συνέχεια. Μια γραφική απεικόνιση της καμπύλης ικανότητας, μαζί με τις παραμέτρους που την ορίζουν, φαίνεται στο Σχήμα 1. Η χαρακτηριστική αντοχή  $R_k$  μπορεί να ληφθεί ως:

$$R_k = \chi R_{pl} \quad (2)$$

όπου  $R_{pl}$  είναι η πλαστική αντοχή του κελύφους ενώ το  $\chi$  δίνεται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\chi = 1 \quad \text{όταν} \quad \bar{\lambda} \leq \bar{\lambda}_0 \quad (3)$$

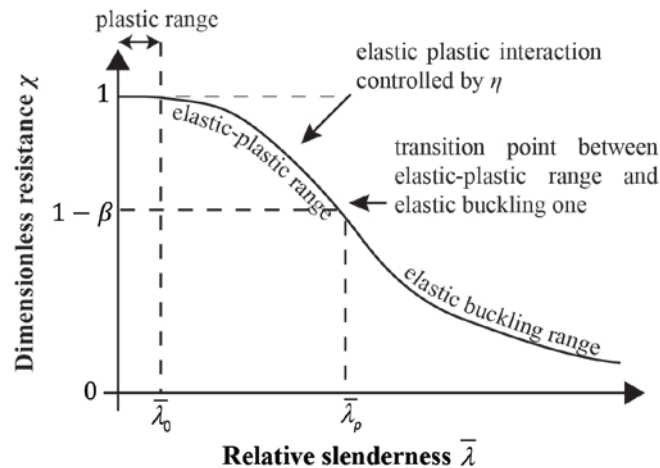
$$\chi = 1 - \beta \left( \frac{\bar{\lambda} - \bar{\lambda}_0}{\bar{\lambda}_p - \bar{\lambda}_0} \right)^\eta \quad \text{όταν} \quad \bar{\lambda}_0 \leq \bar{\lambda} \leq \bar{\lambda}_p \quad (4)$$

$$\chi = \frac{\alpha}{\bar{\lambda}^2} \quad \text{όταν} \quad \bar{\lambda}_p \leq \bar{\lambda} . \quad (5)$$

Στις παραπάνω εξισώσεις,  $\bar{\lambda}_p$  είναι η ανώτατη ανηγμένη λυγηρότητα της ελαστοπλαστικής περιοχής, που δίνεται από τη σχέση

$$\bar{\lambda}_p = \sqrt{\frac{\alpha}{1-\beta}} . \quad (6)$$

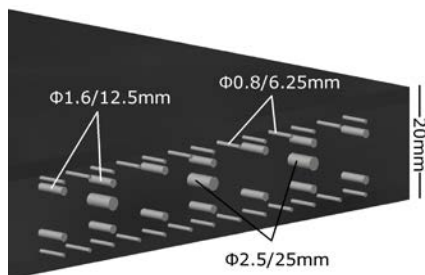
Όπως περιγράφεται την Εξίσωση 3, κατασκευές χαμηλής λυγηρότητας αστοχούν πλήρως πλαστικά ( $\chi = 1$ ) και η αντίστοιχη περιοχή της καμπύλης ικανότητας ορίζεται από την ανώτατη ανηγμένη λυγηρότητα της πλαστικής περιοχής  $\bar{\lambda}_0$ . Από την άλλη πλευρά, μια κατασκευή υψηλής λυγηρότητας αστοχεί λόγω λυγισμού στην ελαστική περιοχή και η ικανότητα της επηρεάζεται μόνο από τις αρχικές ατέλειες. Αυτή η περιοχή περιγράφεται από τον μειωτικό συντελεστή ατελειών  $\alpha$  (ECCS, 2008). Η ελαστική περιοχή λυγισμού ορίζεται από την ανώτατη ανηγμένη λυγηρότητα της ελαστοπλαστικής περιοχής  $\bar{\lambda}_p$ , κάτω από την οποία η μη γραμμικότητα του υλικού επηρεάζει σημαντικά τον λυγισμό. Όπως δείχνει και η Εξίσωση 6, το  $\bar{\lambda}_p$  ελέγχεται από το  $\alpha$  και τον συντελεστή εύρους πλαστικής περιοχής  $\beta$ , ο οποίος συνδέεται άμεσα με τη μείωση της ικανότητας στην συγκεκριμένη λυγηρότητα καθώς ο μειωτικός συντελεστής  $\chi$  ισούται με  $1-\beta$  (ECCS, 2008). Τέλος, κατασκευές μέτριας λυγηρότητας ( $\bar{\lambda}_0 \leq \bar{\lambda} \leq \bar{\lambda}_p$ ) αστοχούν λόγω ελαστοπλαστικού λυγισμού. Αυτός ο τρόπος αστοχίας περιγράφεται από τον συντελεστή εύρους πλαστικής περιοχής  $\beta$  και τον εκθέτη αλληλεπίδρασης  $\eta$ . Ο εκθέτης αλληλεπίδρασης  $\eta$  είναι υπεύθυνος για την περιγραφή του ρυθμού μεταβολής της ικανότητας στην ελαστοπλαστική περιοχή λυγισμού (Doerich και Rotter, 2011).



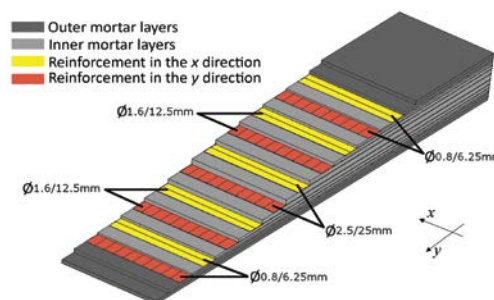
**Σχήμα 1.** Καμπύλη ικανότητας λυγισμού με τις παραμέτρους που την ορίζουν.

## ΜΟΡΦΩΣΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΜΑΤΩΝ

Για τη διερεύνηση της συμπεριφοράς των αξονικά θλιβόμενων κυλινδρικών και των ακτινικά συμπιεζόμενων σφαιρικών τσιμεντοειδών κελυφών, μορφώθηκαν κατάλληλα αριθμητικά προσομοιώματα μέσω του λογισμικού ανάλυσης πεπερασμένων στοιχείων MSC Marc (2011). Για τη μείωση του υπολογιστικού κόστους προσομοιώθηκαν τμήματα των παραπάνω γεωμετριών αξιοποιώντας την συμμετρία της γεωμετρίας και της φόρτισης. Τα προσομοιώματα λύθηκαν με τη χρήση θεωρίας μεγάλων μετακινήσεων και επαναληπτική διαδικασία τύπου arc-length (Crisfield, 1981), ενώ ο έλεγχος σύγκλισης βασίστηκε στις υπολειπόμενες δυνάμεις. Τα μοντέλα θεωρήθηκαν κατασκευασμένα από τσιμεντοειδή μήτρα υψηλής αντοχής C60. Ο οπλισμός τους ήταν διατεταγμένος σε δύο κάθετες κατευθύνσεις με ιδιότητες χάλυβα ποιότητας B500c. Για την προσομοίωση της οπλισμένης διατομής χρησιμοποιήθηκαν σύνθετα επιφανειακά πεπερασμένα στοιχεία με στρώσεις. Συγκεκριμένα, κάθε πεπερασμένο στοιχείο κελύφους αποτελείται από διαδοχικές στρώσεις που προσομοιώνουν τη τσιμεντοειδή μήτρα και τον χάλυβα οπλισμού. Τα χαλύβδινα πλέγματα προσομοιώθηκαν με ισοδύναμα ορθότροπα στρώματα χάλυβα με δυσκαμψία μόνο κατά την διεύθυνση του οπλισμού, ενώ το τσιμεντοειδές κονίαμα προσομοιώθηκε με ισότροπο υλικό. Το Σχήμα 4 παρουσιάζει την προσομοιωμένη διατομή ενώ η δομή του ισοδύναμου σύνθετου πεπερασμένου στοιχείου παρουσιάζεται στο Σχήμα 5. Η παραπάνω διαδικασία προσομοίωσης παρέχει το πλεονέκτημα της ευελιξίας όσον αφορά στη διακριτοποίηση, ενώ αναπαράγει με ακρίβεια τη συμπεριφορά της κατασκευής υπό διάφορες συνθήκες φόρτισης.



Σχήμα 4. Προσομοιωμένη διατομή



Σχήμα 5. Ισοδύναμο πεπερασμένο στοιχείο

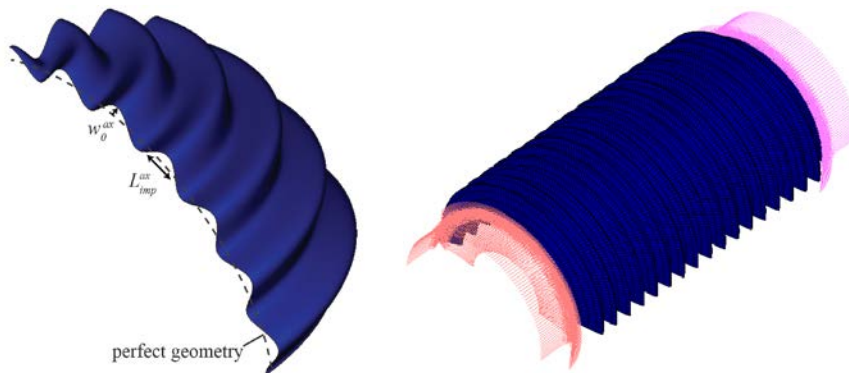
Οι ιδιότητες των υλικών ορίστηκαν με βάση τις διατάξεις του Ευρωκώδικα 2 (EN1992-1-1, 2004). Χρησιμοποιήθηκε η σχέση τάσεων-παραμορφώσεων του σκυροδέματος που προτείνει ο Ευρωκώδικας 2 (EN1992-1-1 §3.15) για τις μη γραμμικές αναλύσεις. Επιπλέον, η χαμηλή εφελκυστική ικανότητα του τσιμεντοειδούς κονιάματος προσομοιώθηκε με τη χρήση του μοντέλου της σταθερής διανεμημένης ρωγμής (fixed smeared crack model) με τελική εφελκυστική δύναμη  $f_{ct} = 4.35 \text{ MPa}$ . Το μέτρο διάτμησης της ρηγματωμένης διατομής του σκυροδέματος θεωρήθηκε ίσο με το 5% της μη ρηγματωμένης, ενώ μετά την ρηγμάτωση έγινε η υπόθεση σταδιακής μείωσης της εφελκυστικής ικανότητας του τσιμεντοειδούς, με συντελεστή εξασθένησης (softening modulus)  $E_{soft} = 7500 \text{ MPa}$ . Για την αντοχή του τσιμεντοειδούς κονιάματος

χρησιμοποιήθηκε το γραμμικό κριτήριο διαρροής Mohr - Coulomb, όπως, όμως, περιγράφεται από τη διατύπωση των Drucker - Prager (1952). Τέλος, για τον σπλισμό χρησιμοποιήθηκε μια ελαστική - τέλεια πλαστική σχέση τάσης-παραμόρφωσης με μέτρο ελαστικότητας 200 GPa.

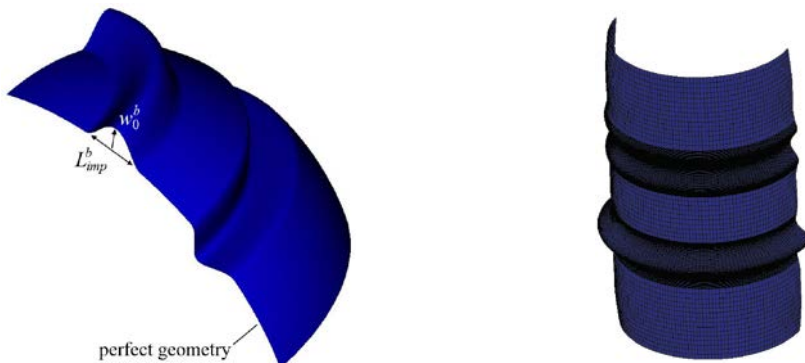
## ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΣΤΗΝ ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΧΗ

Η πρώτη σειρά αναλύσεων εστιάστηκε στην επίδραση της γεωμετρικής μη γραμμικότητας και των αρχικών ατελειών στην ελαστική αντοχή του κελύφους. Αναλυτικότερα, σκοπός αυτής της διερεύνησης ήταν ο προσδιορισμός των γεωμετριών ατελειών που οδηγούν σε μια ασφαλή εκτίμηση της ελαστικής ικανότητας λυγισμού. Αυτή η σειρά αναλύσεων αποτέλεσε τη βάση για τη μετέπειτα έρευνα στην ανελαστική περιοχή, καθώς παρείχε τη γεωμετρία των αρχικών ατελειών που χρησιμοποιήθηκαν αργότερα στις γεωμετρικώς και υλικώς μη γραμμικές αναλύσεις (GMNIA). Όπως μπορεί να παρατηρηθεί στην Εξίσωση 1, οι συστάσεις της IASS λαμβάνουν υπόψη την επίδραση των αρχικών ατελειών με τη χρήση του συντελεστή ευαισθησίας  $\rho_{imp}$ . Η παράμετρος αυτή που λαμβάνει υπόψη την επίδραση του των αρχικών ατελειών πάνω στο ελαστικό φορτίο λυγισμού του κελύφους υπολογίζεται γραφικά με τη χρήση του εύρους των αρχικών ατελειών  $w_0$ . Για να υπολογιστεί η αντίστοιχη παράμετρος αριθμητικά, το φορτίο αστάθειας  $R_{GNIA}$ , που υπολογίζεται από τη γεωμετρικά μη γραμμική ανάλυση του ατελούς κελύφους (GNIA), διαιρείται με την κρίσιμη ελαστική αντίσταση λυγισμού  $R_{cr}$ . Ο υπολογισμός του κρίσιμου φορτίου  $R_{cr}$  για την περίπτωση του αξονικά θλιβόμενου κυλίνδρου και της ακτινικά συμπιεζόμενης σφαίρας δεν παρουσιάζει καμία δυσκολία και μπορεί να υπολογιστεί αναλυτικά από τη θεωρία της ελαστικής ευστάθειας (Timoshenko και Gere, 1961). Για τις ανάγκες της παρούσας έρευνας, ο παράγοντας  $\rho_{imp} = R_{GNIA}/R_{cr}$  υπολογίστηκε για αρχικές ατέλειες διαφορετικής μορφής και εύρους μέσω πολλών γεωμετρικά μη γραμμικών αναλύσεων (GNIA). Το πάχος και η ακτίνα του κελύφους διατηρήθηκαν σταθερά, ενώ το εύρος των αρχικών ατελειών διαφοροποιούνταν μεταξύ αναλύσεων. Εξετάστηκαν δύο γεωμετρικές αρχικών ατελειών. Το πρώτο σχήμα βασίστηκε στην αξονοσυμμετρική ιδιομορφή λυγισμού του κυλίνδρου και της σφαίρας αντίστοιχα, ενώ το δεύτερο ήταν μια ατέλεια απλής μορφής (δακτυλίου) που στόχο είχε την ενεργοποίηση του φαινομένου του λυγισμού (Schneider 2006). Τα μοντέλα με ατέλειες αξονοσυμμετρικής γεωμετρίας παρουσιάζονται στο Σχήμα 6. Το εύρος των αρχικών ατελειών συμβολίζεται ως  $w_0^{ax}$  και ισούται με την απόσταση από την τέλεια γεωμετρία του προσομοιώματος, ενώ το μήκος της ατέλειας,  $L_{imp}$ , είναι ίσο με το μισό του μήκους κύματος της αξονοσυμμετρικής ιδιομορφής λυγισμού,  $L_{imp}^{ax}$  (Timoshenko και Gere, 1961). Η δεύτερη υπό μελέτη γεωμετρία αρχικών ατελειών, αυτή του απλού διεγερτικού δακτυλίου, φαίνεται στο Σχήμα 7, και έχει μέγιστο εύρος  $w_0^b$  και μήκος  $L_{imp}^b$ . Ύστερα από την διεξαγωγή παραμετρικής διερεύνησης ως προς το μήκος της ατέλειας  $L_{imp}^b$ , προέκυψε ότι η μέγιστη μείωση στο φορτίο λυγισμού προκύπτει όταν αυτό ισούται με το διπλάσιο του μήκους ημικύματος της αξονοσυμμετρικής ιδιομορφής,  $L_{imp}^{ax}$ . Στα αριθμητικά μοντέλα, ενσωματώθηκαν ατέλειες τόσο προς το εσωτερικό όσο και προς το

εξωτερικό του κελύφους, ώστε να προκύπτει σε κάθε περίπτωση το ελάχιστο φορτίο λυγισμού. Στο Σχήμα 8 παρουσιάζεται η επιρροή του εύρους των αρχικών ατελειών στην ελαστική ικανότητα της σφαίρας και του κυλίνδρου αντίστοιχα, καθώς και η σύγκριση των αριθμητικών αποτελεσμάτων με τις συστάσεις της IASS. Καθώς το μήκος της ατέλειας διαφέρει μεταξύ των δυο τύπων αναλύσεων, προκειμένου τα αποτελέσματα να είναι συγκρίσιμα, το επίπεδο της ατέλειας εκφράζεται σε όρους  $w_0/L_{imp}$ . Παρά τη μικρή απόκλιση (έως 8%), τα μοντέλα με αρχικές ατέλειες δακτυλίου μπορούν να θεωρηθούν σύμφωνα με τις συστάσεις της IASS και με αυτά των αξονοσυμμετρικών ατελειών. Παρόλο που τα αξονοσυμμετρικά ατελή μοντέλα φαίνεται να εμφανίζουν ελαφρώς καλύτερη σύγκλιση με τα αποτελέσματα της IASS, στη συνέχεια της μελέτης χρησιμοποιήθηκαν αρχικές ατέλειες δακτυλίου, καθώς το φαινόμενο του λυγισμού αναπτύσσεται σε μια συγκεκριμένη περιοχή καθιστώντας τα αριθμητικά μοντέλα πιο σταθερά και αξιόπιστα.



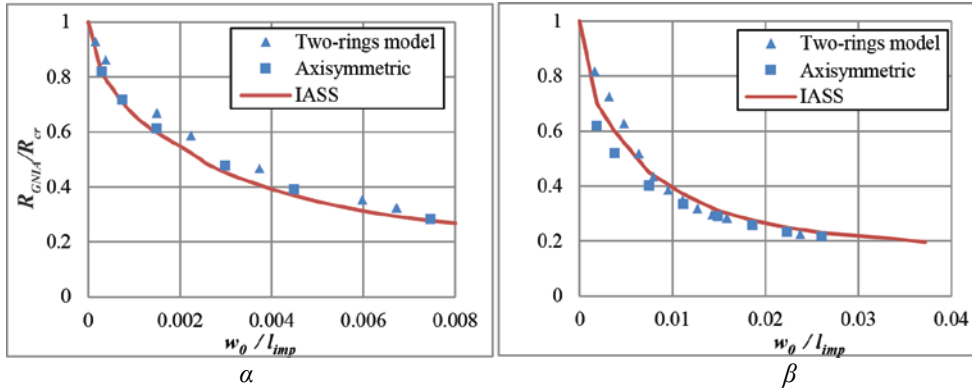
**Σχήμα 6.** Μοντέλα με ατέλειες αξονοσυμμετρικής γεωμετρίας σε σφαίρα και κύλινδρο



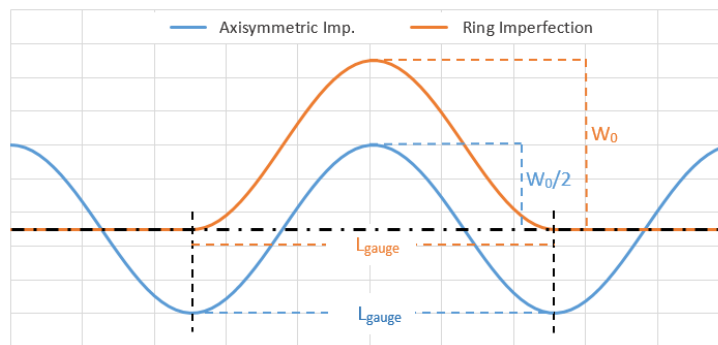
**Σχήμα 7.** Μοντέλα με ατέλειες γεωμετρίας δακτυλίου σε σφαίρα και κύλινδρο

Τέλος, η συμφωνία των αποτελεσμάτων των μοντέλων με αξονοσυμμετρικές ατέλειες με εκείνα με ατέλειες δακτυλίου καθιστά δυνατή την πρόταση μιας επιτόπου τεχνικής μέτρησης κατασκευαστικών ατελειών. Η τεχνική είναι παρόμοια με αυτή που χρησιμοποιείται στην περίπτωση χαλύβδινων κελυφών και βασίζεται σε ένα μήκος μετρητή ίσο με  $3.4\sqrt{Rt}$  (το διπλάσιο του μήκους της

αξονοσυμμετρικής ιδιομορφής λυγισμού). Η τεχνική καλύπτει τόσο ατέλειες που βρίσκονται εξολοκλήρου από την μια πλευρά της τέλει γεωμετρίας όσο και ατέλειες που βρίσκονται εν μέρει προς το κέντρο του κελύφους (inwards) και εν μέρει προς τα έξω (outwards), όπως αναπαρίσταται γραφικά στο Σχήμα 9.



Σχήμα 8. Σύγκριση αποτελεσμάτων αξονοσυμμετρικά ατελών μοντέλων και μοντέλων με ατέλειες δακτυλίου με τη καμπύλη της IASS, α) σφαίρα β) κύλινδρος.



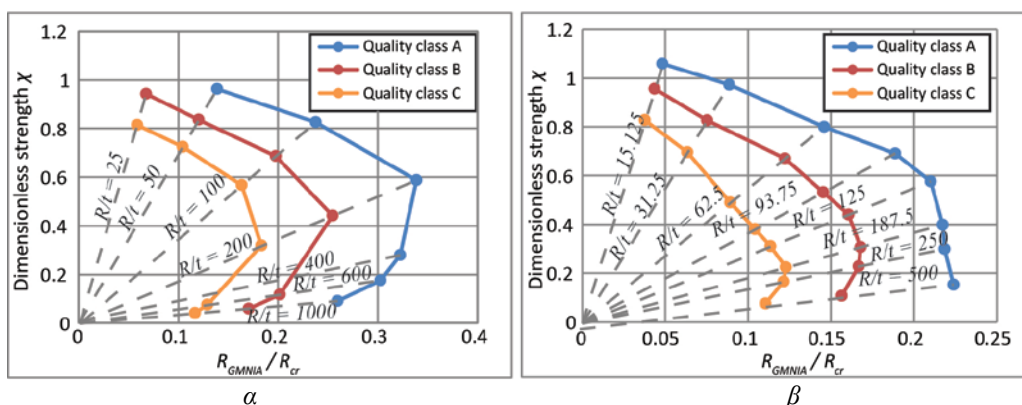
Σχήμα 9. Μέθοδος μέτρησης της ανοχής του κελύφους

## ΠΛΗΡΩΣ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΑΝΑΛΥΣΕΙΣ ΚΑΙ ΕΞΑΓΩΓΗ ΚΑΜΠΥΛΩΝ ΙΚΑΝΟΤΗΤΑΣ ΛΥΓΙΣΜΟΥ

Στην παρούσα παράγραφο εξετάζεται η επιρροή τόσο της γεωμετρικής μη γραμμικότητας όσο και των μη γραμμικών ιδιοτήτων των υλικών. Το εύρος των αρχικών ατελειών εκφράστηκε ως ποσοστό του μήκους της ατέλειας, ανάλογα με την κατηγορία ποιότητας κατασκευής (Fabrication Quality Class) του εκάστοτε κελύφους. Ακολουθώντας τη μεθοδολογία του EN1993-1-6 για τα χαλύβδινα κελύφη, εξετάστηκαν τρεις κατηγορίες ποιότητας κατασκευής, οι κατηγορίες A, B και C, που αντιστοιχούν σε εύρος ισοδύναμης ατέλειας 1%, 1.6% και 2.5% αντίστοιχα. Όσον αφορά το μήκος τους, θεωρήθηκε μήκος ατέλειας  $L_{imp} = L_{imp}^b = 2L_{imp}^{ax}$ . Στα αριθμητικά προσομοιώματα ενσωματώθηκαν αρχικές ατέλειες τόσο προς το εσωτερικό όσο και προς το εξωτερικό του κελύφους, όπως έγινε και για τις ανάγκες της διερεύνησης στην ελαστική περιοχή. Τέλος,



επιλέχθηκε η λυγηρότητα να μεταβάλλεται μέσω αλλαγής της ακτίνας του κελύφους, διατηρώντας το πάχος και το μήκος του σταθερό. Τα αποτελέσματα των αριθμητικών επιλύσεων παρουσιάζονται στο Σχήματα 10 με τη μορφή της τροποποιημένης καμπύλης ικανότητας (Doerich και Rotter, 2011) για την περίπτωση της ακτινικά συμπιεζόμενης σφαίρας και αξονικά θλιβόμενου κυλίνδρου αντίστοιχα. Ο κατακόρυφος άξονας απεικονίζει την κανονικοποιημένη αντοχή  $\chi = R_k/R_{pl} = R_{GMNIA}/R_{pl}$ , όπου  $R_{GMNIA}$  είναι η ικανότητα που υπολογίζεται αριθμητικά και το  $R_{pl}$  είναι η ισοδύναμη πλαστική αντοχή της σύνθετης διατομής. Ο οριζόντιος άξονας αντιστοιχεί στο λόγο  $R_{GMNIA}/R_{cr}$ , όπου  $R_{cr}$  είναι το κλασικό θεωρητικό κρίσιμο φορτίο λυγισμού (Timoshenko και Gere, 1961). Η θεωρητική ελαστική κρίσιμη τάση λυγισμού υπολογίστηκε με τη χρήση του ισοδύναμου μέτρου ελαστικότητας της σύνθετης διατομής. Αντίστοιχα, υπολογίστηκε αναλυτικά και η ισοδύναμη πλαστική αντοχή  $R_{pl}$  σύμφωνα με το ποσοστό όπλισης και τις αντοχές του χάλυβα και του σκυροδέματος. Από το Σχήμα 10, είναι εμφανές ότι όσο αυξάνεται το εύρος της ατέλειας, τόσο η καμπύλη ικανότητας συρρικνώνεται. Επιπλέον, καθώς αυξάνεται η λυγηρότητα, η αστοχία μεταβάλλεται από πλαστική κατάρρευση σε ελαστοπλαστικό λυγισμό και τέλος σε οιονεί-ελαστική αστοχία λόγω λυγισμού. Σημειώνεται πως ο όρος «οιονεί-ελαστικός λυγισμός» χρησιμοποιείται για να περιγράψει τη μορφή αστοχίας που όταν εμφανίζεται ο λυγισμός, η μόνη ουσιαστική μη γραμμικότητα υλικού είναι η ρηγμάτωση του τσιμεντοειδούς κονιάματος.



**Σχήμα 10.** Αποτελέσματα αριθμητικών αναλύσεων για διαφορετικές κατηγορίες ποιότητας κατασκευής, α) σφαίρα β) κύλινδρος.

## ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΕΣ ΚΑΜΠΥΛΕΣ ΙΚΑΝΟΤΗΤΑΣ ΛΥΓΙΣΜΟΥ

Στο προηγούμενη ενότητα, διεξήχθησαν γεωμετρικώς και υλικώς μη γραμμικές αναλύσεις της ατελούς κατασκευής (GMNIA), προκειμένου να υπολογιστεί η χαρακτηριστική ικανότητα λυγισμού  $R_k$  σε κάθε περίπτωση ( $R_k = R_{GMNIA}$ ). Ωστόσο, τέτοιες αναλύσεις δεν είναι εύκολο να πραγματοποιηθούν στην καθημερινή πράξη για πολλούς λόγους. Όπως προαναφέρθηκε, στην περίπτωση των χαλύβδινων κελυφών, ο EN1993-1-6 παρέχει απλοποιημένες προσεγγίσεις σχεδιασμού, οι οποίες βασίζονται σε καμπύλες ικανότητας λυγισμού που

προσδιορίζονται από τέσσερις παραμέτρους. Με βάση τα αριθμητικά αποτελέσματα των πλήρως μη γραμμικών αναλύσεων, επιδιώκεται τώρα ο προσδιορισμός των τεσσάρων παραμέτρων λυγισμού για κάθε κατηγορία ποιότητας κατασκευής, έτσι ώστε να επιτυγχάνεται μια καλή προσαρμογή μεταξύ των παραμετρικών καμπυλών και των αναλύσεων. Πέραν της συμφωνίας με τα αριθμητικά αποτελέσματα, ο προσδιορισμός της κάθε παραμέτρου βασίστηκε και στο φυσικό της νόημα και στην πτυχή της συμπεριφοράς που καλείται να περιγράψει. Αρχικά, προσδιορίστηκε ο μειωτικός συντελεστής ατελειών  $\alpha$  (Πίνακας 1). Ο συγκεκριμένος συντελεστής στην περίπτωση αυτή θα χρησιμοποιηθεί για την περιγραφή της περιοχής του οιονεί-ελαστικού λυγισμού. Επιλέχθηκε να ακολουθηθεί η ίδια μορφή εξίσωσης με αυτή που προτείνεται από τον Ευρωκώδικα 3 για την περίπτωση του αξονικά θλιβόμενου κυλίνδρου. Μόνο στην περίπτωση του κυλίνδρου ποιότητας κατασκευής A επιλέχθηκε σταθερή τιμή για το  $\alpha$  καθώς ένας σταθερός μειωτικός συντελεστής παράγει καλά αποτελέσματα.

**Πίνακας 1.** Τιμές μειωτικού συντελεστή ατελειών  $\alpha$ .

Κατηγορία ποιότητας κατασκευής	Αξονικά θλιβόμενος κύλινδρος	Ακτινικά θλιβόμενη σφαίρα
A	$\alpha = 0.215$	$a = \frac{0.61}{1 + \left(\frac{1}{Q} \sqrt{\frac{R}{t}}\right)^{0.8}}$
B και C	$\alpha = \frac{0.345}{1 + \left(\frac{1}{Q} \sqrt{\frac{r}{t}}\right)^{0.3}}$	

**Πίνακας 2.** Τιμές παραμέτρου ποιότητας κατασκευής  $Q$ .

Κατηγορία ποιότητας κατασκευής	Αξονικά θλιβόμενος κύλινδρος	Ακτινικά θλιβόμενη σφαίρα
A	-	24
B	12	10
C	2	5

Κατόπιν, προσδιορίστηκε η παράμετρος  $\bar{\lambda}_0$ . Για κάθε κατηγορία ποιότητας κατασκευής προσδιορίστηκε η τιμή της παραμέτρου ως το σημείο τομής της καμπύλης με την οριζόντια γραμμή που διέρχεται από το  $\chi = 1$ . Οι Εξισώσεις 7 και 8 αποδίδουν τη μεταβολή του  $\bar{\lambda}_0$  με το επίπεδο των αρχικών ατελειών για την περίπτωση του κυλίνδρου και της σφαίρας:

$$\bar{\lambda}_0 = 0.5502e^{-72.83(w_0/L_{imp})} \quad (7)$$

$$\bar{\lambda}_0 = -20.307 \frac{w_0}{L_{imp}} + 0.5269 \quad (8)$$

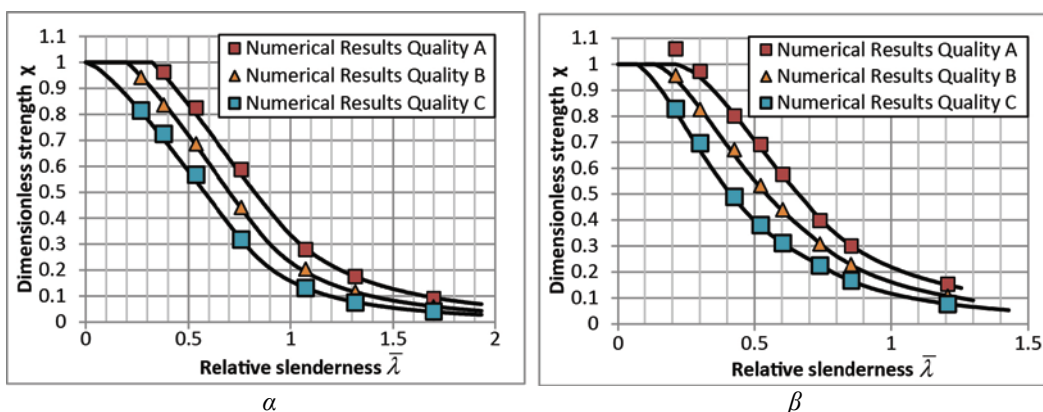
Τέλος, για τον πλήρη προσδιορισμό της καμπύλης ικανότητας απαιτείται ο προσδιορισμός των παραμέτρων  $\beta$  και  $\eta$ . Από τα αποτελέσματα σχετικής διερεύνησης, φαίνεται ότι οι συγκεκριμένες παράμετροι επηρεάζονται εκτός από το εύρος των αρχικών ατελειών και από τις ιδιότητες των υλικών. Καθώς δεν έχει γίνει αναφορά σε αναλύσεις με διαφορετικές ιδιότητες υλικών, στην παρούσα εργασία θα περιοριστούμε στην αναφορά τιμών που οδηγούν σε ικανοποιητική προσέγγιση των αριθμητικών αποτελεσμάτων (Πίνακας 3). Επίσης, όσον αφορά τον εκθέτη αλληλεπίδρασης  $\eta$ , φαίνεται ότι μια σταθερή τιμή δεν μπορεί να αποδώσει την γρήγορη πτώση αντοχής στην ελαστοπλαστική περιοχή. Έτσι προτείνεται η χρήση μεταβαλλόμενου εκθέτη αλληλεπίδρασης, σύμφωνα με την Εξίσωση 9, για κύλινδρο και σφαίρα αντίστοιχα.

$$\eta(\bar{\lambda}) = \frac{\eta_0 (\bar{\lambda}_p - \bar{\lambda})^\theta + \eta_p (\bar{\lambda} - \bar{\lambda}_0)^\theta}{(\bar{\lambda}_p - \bar{\lambda}_0)^\theta} \quad (9)$$

**Πίνακας 3.** Τιμές παραμέτρων  $\beta$ ,  $\eta$  και  $\theta$ .

	Κατηγορία ποιότητας A		Κατηγορία ποιότητας B		Κατηγορία ποιότητας C	
	Κύλινδρος	Σφαίρα	Κύλινδρος	Σφαίρα	Κύλινδρος	Σφαίρα
$\beta$	0.53	-	0.67	-	0.79	-
$\eta_0$	1.45	1	1.3	1	1.1	1
$\eta_p$	1	0.8	0.7	0.8	0.5	0.8
$\theta$	1	1	1.2	1	1.5	1

Στο Σχήμα 11 συγκρίνονται οι παραμετρικές καμπύλες ικανότητας με τις αντίστοιχες αριθμητικές. Από τη σύγκριση των αποτελεσμάτων φαίνεται ότι με την χρήση των παραπάνω εξισώσεων και τιμών επιτυγχάνεται εξαιρετική προσέγγιση της συμπεριφοράς των δυο μελετώμενων περιπτώσεων.



**Σχήμα 11.** Σύγκριση των παραμετρικών καμπυλών με τα αντίστοιχα αριθμητικά αποτελέσματα, α) σφαίρα β) κύλινδρος.

## ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα εργασία μελετήθηκε η συμπεριφορά λεπτών κελυφών από τσιμεντοειδή υλικά υψηλής επιτελεστικότητας (ακτινικά συμπιεζόμενη σφαίρα, αξονικά θλιβόμενος κυλίνδρος). Αρχικά η διερεύνηση επικεντρώθηκε στην ελαστική περιοχή και προέκυψε ότι η χρήση ατελειών σε σχήμα δακτυλίου που έχουν ως στόχο την ενεργοποίηση του λυγισμού είναι ισοδύναμες με τις αξονοσυμμετρικές ατέλειες. Με βάση αυτή την ισοδυναμία, προτάθηκε μία επιτόπου τεχνική μετρήσεων των ατελειών με βάση έναν μετρητή με μήκος ίσο με το μήκος κύματος της αξονοσυμμετρικής ιδιομορφής. Στη συνέχεια, προσδιορίστηκε η καμπύλη ικανότητας για διαφορετικά επίπεδα αρχικών ατελειών, με τη χρήση μη γραμμικών μοντέλων με ενσωματωμένες αρχικές ατέλειες. Από τα αποτελέσματα διαπιστώθηκε ότι η συμπεριφορά τόσο της σφαίρας όσο και του κυλίνδρου περιγράφονται από τρεις περιοχές, την πλαστική, στην οποία το κέλυφος αστοχεί υπό το φορτίο πλαστικής κατάρρευσης, την περιοχή του οιονεί-ελαστικού λυγισμού, στην οποία ο λυγισμός εμφανίζεται πριν την εμφάνιση υλικής μη γραμμικότητας πέραν της ρηγματώσεως και μια ενδιάμεση περιοχή ελαστοπλαστικού λυγισμού όπου το φορτίο λυγισμού επηρεάζεται από τη μη γραμμική συμπεριφορά των υλικών. Τέλος, προτάθηκαν εξισώσεις ώστε να είναι δυνατή η προσέγγιση των αριθμητικών αποτελεσμάτων με παραμετρικές καμπύλες, έχοντας ως βάση το επίπεδο των αρχικών ατελειών.

## ΑΝΑΦΟΡΕΣ

- Crisfield M.A., A fast incremental/iterative solution procedure that handles “snap-through”, *Comput Struct* 13 (1) (1981) 55–62.
- Doerich C., Rotter J.M., Generalised capacity curves for stability and plasticity: Application and limitations, *Thin-Walled Struct* 49 (9) (2011) 1132–1140.
- Drucker D.C., Prager W., Soil mechanics and plastic analysis or limit design, *Q Appl Math* 10 (1952) 157–165.
- Dulácska E., Kollár L., Design procedure for the buckling analysis of reinforced concrete shells, *Thin-Walled Struct* 23 (1) (1995) 313–321.
- ECCS, Buckling of steel shells European design recommendations, 5th ed., ECCS - European Convention for Constructional Steelwork, Brussels, 2008.
- EN 1992-1-1, Eurocode 2: Design of Concrete Structures, Part 1. 1: General Rules and Rules for Buildings, CEN, Brussels, 2004.
- IASS Working Group No. 5, Recommendations for reinforced concrete shells and folded plates Madrid, 1979.
- Kollár L., Dulácska E., Buckling of shells, John Wiley and Sons, Chichester, 1982.
- MSC Software Corporation, MSC Marc, Volume A: Theory and user information, 2011.
- Schneider W., Stimulating equivalent geometric imperfections for the numerical buckling strength verification of axially compressed cylindrical steel shells, *Comput Mech* 37 (6) (2006) 530–536.
- Timoshenko S.P., Gere J.M., Theory of elastic stability, Engineering societies monographs, McGraw-Hill, New York, 1961.