

**Συγκριτική αξιολόγηση των απλοποιημένων μεθόδων του  
EN1992-1-1 για δευτέρας τάξης ανάλυση λυγηρών  
υποστυλωμάτων**

**Comparative evaluation of the simplified methods of  
EN1992-1-1 for second order analysis of slender columns**

**Χρυσάνθος ΜΑΡΑΒΕΑΣ<sup>1,2</sup>**

Λέξεις κλειδιά: Ωπλισμένο Σκυρόδεμα, Λυγηρά υποστυλώματα, Φαινόμενα  
δευτέρας τάξης, Απλοποιημένες μέθοδοι

**ΠΕΡΙΛΗΨΗ:** Ο Ευρωκώδικας 2 (EN 1992-1-1) προτείνει δύο απλοποιημένες μεθόδους για την ανάλυση των λυγηρών υποστυλωμάτων σε φαινόμενα δευτέρας τάξης. Η μία μέθοδος βασίζεται στην ονομαστική ακαμψία και η άλλη μέθοδος στην ονομαστική καμπυλότητα. Καθώς ο κανονισμός αυτός προτείνει δύο εναλλακτικές μεθόδους, θα ήταν αναμενόμενο να δίνουν παρόμοια αποτελέσματα. Όπως αναλύεται στην εργασία αυτή, αυτό δεν ισχύει, οι δύο αυτές μέθοδοι δίνουν σημαντικά διαφορετικά αποτελέσματα και δημιουργείται ανασφάλεια στους μηχανικούς ως προς την ακρίβεια των υπολογισμών τους. Μετά από σύγκριση των αποτελεσμάτων των μεθόδων αυτών, με αντίστοιχα αποτελέσματα πειραμάτων από την βιβλιογραφία, προτείνεται η χρήση της μεθόδου που βασίζεται στην ονομαστική καμπυλότητα καθώς αυτή δίνει πιο ακριβή αποτελέσματα.

**ABSTRACT:** Eurocode 2 (EN 1992-1) proposes two simplified methods for second order analysis of slender columns. The first based on nominal stiffness and the second method based on nominal curvature. As both methods are proposed by the same code it is expected that they provide similar solutions. As it is presented in this paper, this is not the case, as these methods are giving very different results. After the comparison with experimental results from the literature, it is suggested the use of the method based on the nominal curvature which is giving accurate results.

---

<sup>1</sup> Τεχνικός Διευθυντής, Χ. ΜΑΡΑΒΕΑΣ ΚΑΙ ΣΥΝΕΡΓΑΤΕΣ ΙΚΕ – Σύμβουλοι Μηχανικοί

<sup>2</sup> Post-Doctoral Research Fellow, University of Liege, Liege, Belgium

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Λόγω της ιδιαίτερης σημασίας των υποστυλωμάτων για την ευστάθεια των κατασκευών, απαιτείται από τους κανονισμούς (EN 1992-1-1 (2004)) να λαμβάνονται υπόψη τα φαινόμενα δευτέρας τάξης, όταν αυτά είναι λυγηρά (δηλαδή με λυγηρότητα μεγαλύτερη του  $\lambda_{lim}$ , ορίου που καθορίζεται από τα αντίστοιχα Εθνικά Προσαρτήματα).

Τα φαινόμενα δευτέρας τάξης μπορούν να ληφθούν υπόψη με μη γραμμικές αναλύσεις (γεωμετρική μη γραμμικότητα – μεγάλες μετακινήσεις), όμως οι περισσότεροι μηχανικοί δεν είναι εξοικειωμένοι με αυτές τις μεθόδους ανάλυσης και το κόστος εκπόνησης τέτοιων αναλύσεων είναι σημαντικό για συνήθη κτιριακά έργα. Για τους λόγους αυτούς οι κανονισμοί προβλέπουν τις απλοποιημένες μεθόδους υπολογισμού.

Ο EN 1992-1-1(2004) προβλέπει δύο εναλλακτικές απλοποιημένες μεθόδους για τον υπολογισμό της ροπής που προκύπτει από τα φαινόμενα δευτέρας τάξης. Η πρώτη, βασίζεται στην ονομαστική ακαμψία και είναι σχεδόν ίδια με την μέθοδο που προτείνει το ACI 318-14 (2014), ενώ η δεύτερη, βασίζεται στην ονομαστική καμυλότητα και προέρχεται από το CEB-FIB Model Code 1990 (1993) και το fib Model Code 2010 (2010).

Διάφοροι ερευνητές (Barros et al (2010), Bonet et al (2007), Bonet et al (2011)) έχουν προτείνει βελτιώσεις των απλοποιημένων αυτών μεθόδων ή ριζική τροποποίηση τους. Ο σκοπός της εργασίας αυτής, δεν είναι να προτείνει βελτιώσεις ή τροποποιήσεις των μεθόδων αυτών, αλλά μετά από αναλυτική παρουσίαση και διερεύνηση και λαμβάνοντας υπόψη πειραματικά δεδομένα από την βιβλιογραφία να προτείνει τη χρήση της πιο ακριβούς μεθόδου από τις δύο.

Η εργασία δεν καλύπτει περιπτώσεις διαξονικής κάμψης.

Όπως θα τεκμηριωθεί στην συνέχεια, η χρήση της μεθόδου που βασίζεται στην ονομαστική καμυλότητα, δίνει πιο ακριβή αποτελέσματα, όταν τα φορτία είναι μικρής διάρκειας. Εάν εφαρμόζονται αυξημένα φορτία μεγάλης διάρκειας, προτείνεται συνδυαστικά η χρήση του μοντέλου για τον ερπυσμό που παρουσιάζεται στο CEB-FIB Model Code 1990 (1993).

## ΜΕΘΟΔΟΣ ΒΑΣΗ ΤΗΣ ΟΝΟΜΑΣΤΙΚΗΣ ΑΚΑΜΨΙΑΣ

Το κρίσιμο φορτίο λυγισμού ενός υποστυλώματος με σταθερή διατομή δίνεται από την σχέση:

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l_e^2} \quad (1)$$

όπου το  $l_e$  είναι το μήκος λυγισμού που εξαρτάται από τις συνοριακές συνθήκες και  $EI$  είναι η ονομαστική ακαμψία η οποία για διατομή με οπλισμό μεγαλύτερο από 2%<sub>0</sub> δίνεται από την σχέση:

$$EI = \left( \frac{k_1 k_2}{1 + \varphi_{ef}} \right) E_{cd} I_c + E_s I_s \quad (2)$$

όπου  $E_s$  είναι το μέτρο ελαστικότητας του οπλισμού,  $I_c$  και  $I_s$  είναι οι ροπές αδράνειας του σκυροδέματος και του οπλισμού,  $k_1$  και  $k_2$  είναι συντελεστές που εξαρτώνται από την αντοχή του σκυροδέματος και το αξονικό φορτίο και τη λυγηρότητα αντίστοιχα. Επίσης,  $E_{cd}$  είναι η τιμή σχεδιασμού του μέτρου ελαστικότητας του σκυροδέματος και υπολογίζεται από την σχέση:

$$E_{cd} = \frac{22}{\gamma_E} \left( \frac{f_{ck} + 8}{10} \right)^{0.3} (GPa) \quad (3)$$

Στην Εξίσωση 2, το  $\varphi_{ef}$  είναι ο λόγος ενεργού ερπυσμού.

Για τον υπολογισμό της ονομαστικής ακαμψίας (Εξίσωση 2) και τελικά του κρίσιμου αξονικού φορτίου λυγισμού (Εξίσωση 1) πρέπει να είναι γνωστός ο οπλισμός της διατομής. Επομένως, απαιτείται επαναληπτική διαδικασία με αύξηση του οπλισμού σε βήματα μέχρι να ικανοποιούνται όλα τα κριτήρια σχεδιασμού.

### Ροπή Σχεδιασμού

Η συνολική ροπή σχεδιασμού, συμπεριλαμβανομένης της ροπής δευτέρας τάξης, δίνεται από την σχέση:

$$M_{Ed} = M_{0Ed} \left[ 1 + \frac{\beta}{(N_B/N_{Ed})^{-1}} \right] = M_{0Ed} \alpha_1 \quad (4)$$

όπου το τμήμα της Εξίσωσης (4) σε αγκύλη, αποτελεί τον συντελεστή μεγέθυνσης, έστω  $\alpha_1$ , και το  $N_B$  είναι το φορτίο λυγισμού βάση της ονομαστικής ακαμψίας (Εξίσωση (1)), το  $N_{Ed}$  είναι η αξονική δύναμη σχεδιασμού και  $M_{0Ed}$  είναι η ισοδύναμη ροπή πρώτης τάξης. Το  $\beta$  είναι συντελεστής που δίνεται από την σχέση:

$$\beta = \pi^2 / c_0 \quad (5)$$

όπου το  $c_0$  είναι συντελεστής που εξαρτάται από τη μεταβολή των ροπών πρώτης τάξης καθ' ύψος του υποστυλώματος.

Και στις δύο απλοποιημένες μεθόδους, όταν στα άκρα του υποστυλώματος επιβάλλονται ροπές πρώτης τάξης  $M_{01}$  και  $M_{02}$  και δεν εφαρμόζονται φορτία μεταξύ των δύο άκρων μία ισοδύναμη ροπή πρώτης τάξης  $M_{0Ed}$  λαμβάνεται υπόψη για τον σχεδιασμό. Η ισοδύναμη αυτή ομοιόμορφη ροπή δίνεται από την εξίσωση:

$$M_{0Ed} = 0.6M_{02} + 0.4M_{01} \geq 0.4M_{02}, |M_{02}| \geq |M_{01}| \quad (6)$$

Όπου η  $M_{01}$  και η  $M_{02}$  έχουν το ίδιο πρόσημο εάν εφελκύουν την ίδια πλευρά, διαφορετικά έχουν αντίθετα πρόσημα.

Όταν  $N_B = N_{0Ed}$ , η Εξίσωση 4 δίνει άπειρη ροπή σχεδιασμού.

Στην πράξη η αξονική σχεδιασμού  $N_{0Ed}$  πρέπει να είναι πολύ μικρότερη από το κρίσιμου φορτίου  $N_B$  ώστε να αποφευχθεί η πολύ μεγάλη μεγέθυνση της ροπής σχεδιασμού.

Ενδεικτικά αποτελέσματα της Εξίσωσης 4 παρουσιάζονται στη **Σχήμα 1**.

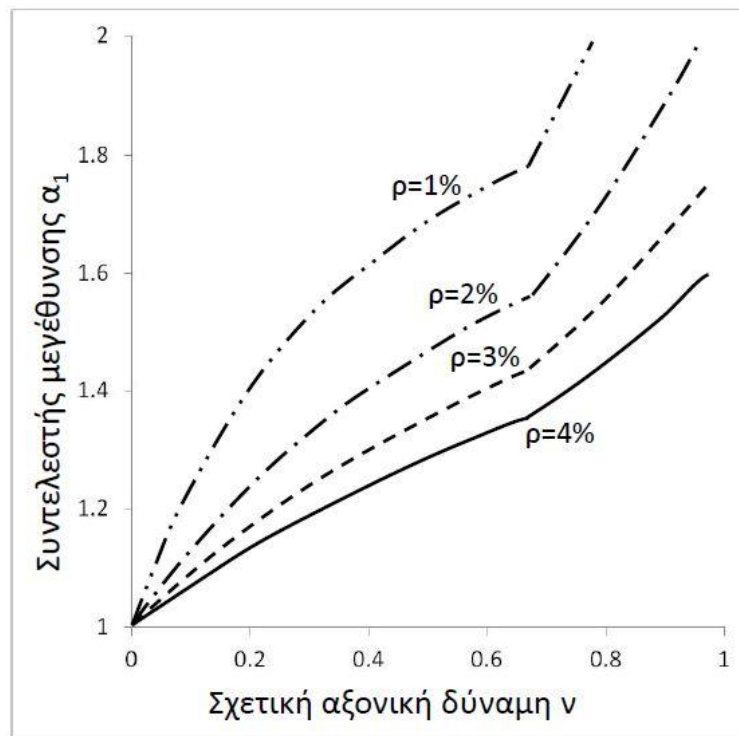
## ΜΕΘΟΔΟΣ ΒΑΣΗ ΤΗΣ ΟΝΟΜΑΣΤΙΚΗΣ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑΣ

Στη μέθοδο αυτή η ροπή σχεδιασμού ορίζεται ως:

$$M_{Ed} = M_{0Ed} + N_{Ed} e_2 \quad (7)$$

Όπου η  $M_{0Ed}$  δίνεται από την Εξίσωση 6, η  $N_{Ed}$  είναι η αξονική δύναμη σχεδιασμού και η  $e_2$  είναι η μετακίνηση που δίνεται από την σχέση:

$$e_2 = (1/r)l_0^2/c \quad (8)$$



**Σχήμα 1.** Συντελεστής μεγέθυνσης  $\alpha_1$  ως συνάρτηση του λόγου σχετικού αξονικού φορτίου  $\nu$  ( $f_{ck}=30$  MPa,  $\varphi_{ef}=0$ ,  $\lambda=50$ ) για διαφορετικά ποσοστά οπλισμού.

Όπου  $l_0$  είναι το ισοδύναμο μήκος,  $r$  η καμπυλότητα και  $c$  συντελεστής που εξαρτάται από την κατανομή της καμπυλότητας καθ' ύψος του υποστυλώματος. Η καμπυλότητα στην Εξίσωση 8 δίνεται από την σχέση:

$$\frac{1}{r} = K_r K_\varphi 1/r_0 \quad (9)$$

Όπου  $K_r$  είναι διορθωτικός συντελεστής που εξαρτάται από το αξονικό φορτίο,  $K_\varphi$  είναι συντελεστής που λαμβάνει υπόψη τον ερπυσμό και το  $1/r_0$  δίνεται από την σχέση:

$$\frac{1}{r_0} = f_{yd}/(E_s 0.45d) \quad (10)$$

Όπου  $d$  είναι το ενεργό ύψος και το  $K_\varphi$  δίνεται από την σχέση:

$$K_\varphi = 1 + \left(0.35 + \frac{f_{ck}}{200} - \frac{\lambda}{150}\right) \varphi_{ef} \geq 1 \quad (11)$$

Ο συντελεστής  $K_\varphi$  μειώνεται, όσο αυξάνεται η λυγηρότητα. Έτσι, για πολύ λυγηρά υποστυλώματα, ο ερπυσμός πρακτικά δεν λαμβάνεται υπόψη. Αυτό όμως, αυτό έρχεται σε αντίθεση με άλλες διατάξεις του EN 1992-1-1 (2004) οι οποίες προβλέπουν ότι ο ερπυσμός μπορεί να αγνοηθεί μόνο εάν ισχύουν συγχρόνως  $\varphi_\infty \leq 2$ ,  $\lambda \leq 75$ ,  $e_1/h \geq 1$ , και κατά συνέπεια η Εξίσωση 11 χρειάζεται τροποποίηση. Τα CEB-FIB Model Code 1990 (1993) και FIB Model Code 2010 (2010) χρησιμοποιούν τις ίδιες εξισώσεις αλλά λαμβάνουν όμως υπόψη με διαφορετικό τρόπο τον ερπυσμό. Στο FIB Model Code 2010 (2010), ο ερπυσμός λαμβάνεται υπόψη ως υφιστάμενη καμπυλότητα. Το CEB-FIB Model Code 1990 (1993) εισάγει μία επιπλέον εκκεντρότητα  $e_c$  που αντιστοιχεί στον ερπυσμό.

## ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ ΤΩΝ ΔΥΟ ΜΕΘΟΔΩΝ

Για να είναι συγκρίσιμα τα αποτελέσματα των δύο μεθόδων, πέραν του συντελεστή μεγέθυνσης  $\alpha_1$  που ορίστηκε ανωτέρω και αφορούσε τη μέθοδο βάση της ονομαστικής ακαμψίας, προσδιορίζουμε έναν συντελεστή μεγέθυνσης  $\alpha_2$  για την μέθοδο βάση της ονομαστικής καμπυλότητας, ως κάτωθι:

$$\alpha_2 = M_{Ed}/M_{0Ed} \quad (12)$$

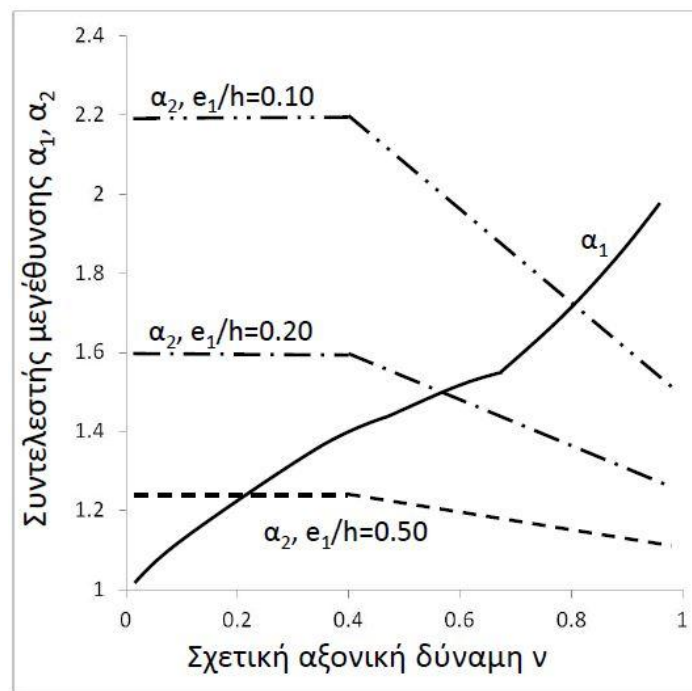
Συγκριτική παρουσίαση των συντελεστών μεγέθυνσης ως συνάρτηση του λόγου σχετικού αξονικού φορτίου  $\nu$  γίνεται ενδεικτικά στο **Σχήμα 2**.

Από το σχήμα είναι εμφανές ότι τα αποτελέσματα των δύο μεθόδων δεν είναι συγκρίσιμα.

## ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΕ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Από την βιβλιογραφία, συλλέχθηκαν πειραματικά δεδομένα, τα στοιχεία των οποίων παρουσιάζονται στον Πίνακα 1.

Για την σύγκριση των πειραματικών αποτελεσμάτων με τις δύο απλοποιημένες μεθόδους, χρησιμοποιήθηκαν μόνο βραχυχρόνια φορτία. Για μακροχρόνια φορτία, και κατά συνέπεια με φαινόμενα ερπυσμού, πέραν των μεθόδων του κανονισμού, χρησιμοποιήθηκε τροποποιημένη η μέθοδος της ονομαστικής καμπυλότητας, δηλαδή λήφθηκε  $K_\phi = 1$  αλλά προσαυξήθηκε η αρχική καμπυλότητα  $e_c$  λόγω ερπυσμού κατά τα οριζόμενα στο FIB Model Code 2010 (2010).



**Σχήμα 2.** Συντελεστές μεγέθυνσης  $\alpha_1$  και  $\alpha_2$  ως συνάρτηση του λόγου αξονικού φορτίου  $\nu$  ( $f_{ck} = 30$  MPa,  $\phi_{ef} = 0$ ,  $\lambda = 50$ ,  $\rho = 0.02$ )

Τα συγκριτικά αποτελέσματα παρουσιάζονται στο **Σχήμα 3** για βραχυχρόνιες και στο **Σχήμα 4** για μακροχρόνιες δράσεις.

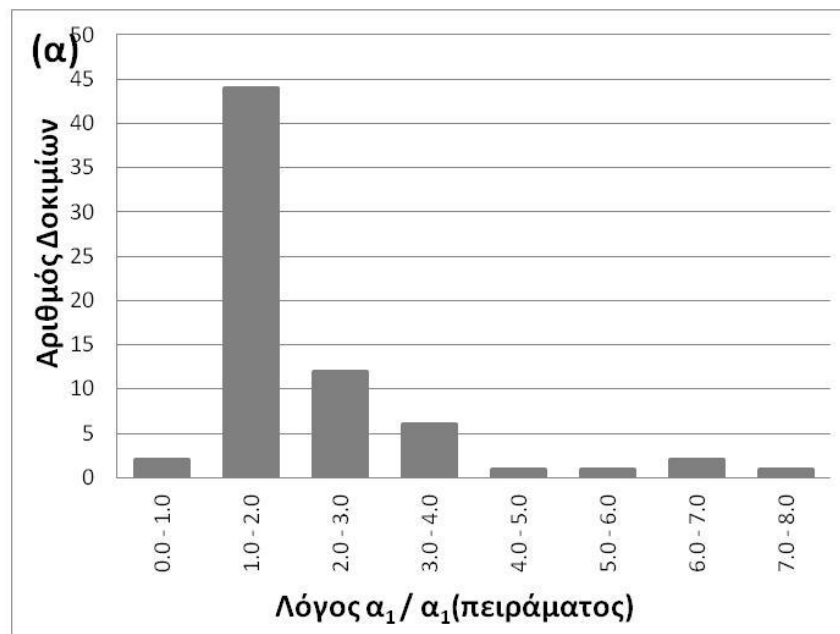
Από την συγκριτική αξιολόγηση προκύπτει ότι, για βραχυχρόνιες δράσεις η μέθοδος βάση της ονομαστικής ακαμψίας δίνει πολύ συντηρητικά αποτελέσματα,

ενώ η μέθοδος βάση της ονομαστικής καμπυλότητας δίνει πολύ πιο ακριβή αποτελέσματα.

Αντίστοιχα, για βραχυχρόνιες δράσεις, φαίνεται ότι η τροποποιημένη μέθοδος (ονομαστική καμπυλότητα σε συνδυασμό με αρχική καμπυλότητα  $e_c$  λόγω ερπυσμού κατά τα οριζόμενα στο FIB Model Code 2010 (2010)) δίνει πιο ασφαλή αποτελέσματα συγκριτικά με της μέθοδο βάση της καμπυλότητας ως περιγράφεται στον EN 1992-1-1 (2004).

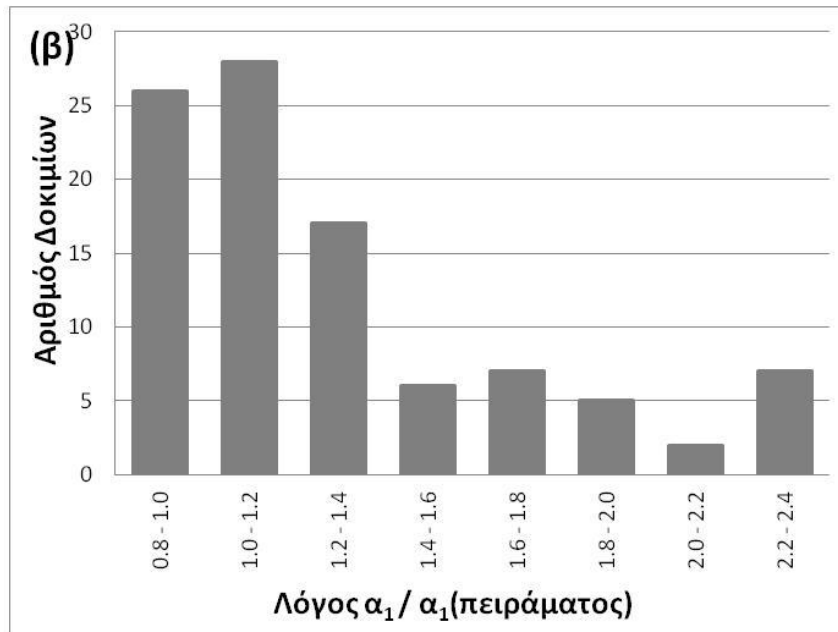
Πίνακας 1. Παράμετροι πειραματικών δεδομένων από την βιβλιογραφία

Παράμετροι	Leite et al (2013)	Kim and Yang (1995)	Melo (2009)	Goyal and Jackson (1971)	Goyal and Jackson (1971)
Αριθμός Πειραμάτων	32	16	21	26	20
$e_1/h$	.04-.33	.30	.05-.5	.17-.5	.17-.5
$\Lambda$	70-104	10-104	58-87	55-125	55-125
$f_{ck}$	29.5-93.2	25.5-86.0	33.9-45.8	19.9-23.6	19.9-23.6
N	.09-.78	.1-.45	.12-.57	.16-.67	.15-.65
$\varphi_{ef}$	0	0	0	0	.8-1.6
$\rho$ (%)	2.26-3.4	2.0-4.0	1.56	1.7-2.5	1.7-2.5
$M_{01}/M_{02}$	$\pm 5$ , 0.0	1.0	1.0	1.0	1.0





(Σχήμα 3: Συνεχίζεται)



**Σχήμα 3.** (α) Λόγος  $\alpha_1 / \alpha_1$  (πειράματος) βάση της μεθόδου ονομαστικής ακαμψίας και (β) λόγος  $\alpha_2 / \alpha_2$  (πειράματος) βάση της μεθόδου ονομαστικής καμπυλότητας για βραχυχρόνιες δράσεις.

## ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

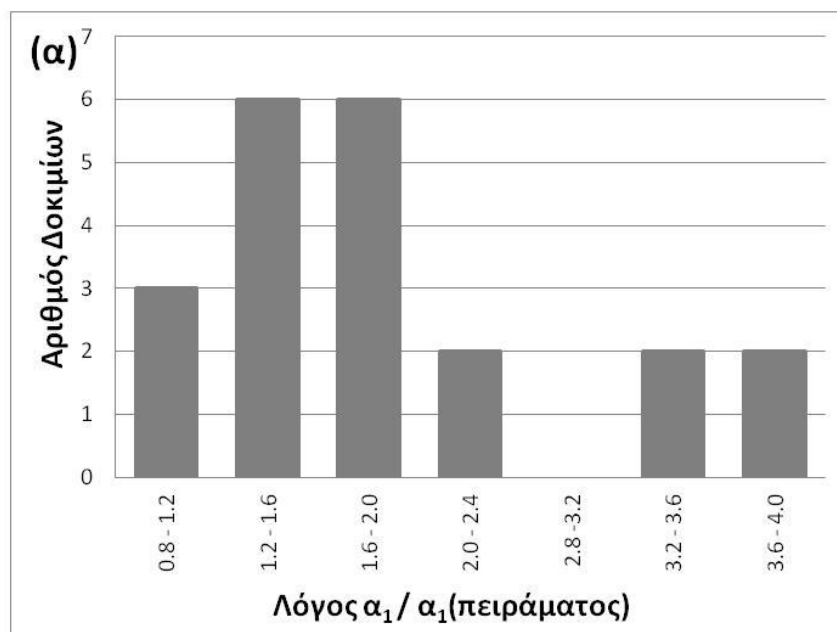
Όπως συμβαίνει συνήθως στους κανονισμούς, ο EN 1992-1-1(2004) προτείνει δύο εναλλακτικές απλοποιημένες μεθόδους για τα φαινόμενα δευτέρας τάξης σε λυγηρά υποστυλώματα. Με την ύπαρξη δύο διακριτών μεθόδων, ο μηχανικός μπορεί να επιλέξει όποια θέλει, θεωρώντας ότι τα αποτελέσματα είναι παρόμοια και ασφαλή. Όμως αποδείχθηκε στην εργασία αυτή, οι δύο μέθοδοι δίνουν πολύ διαφορετικά αποτελέσματα.

Η μέθοδος της ονομαστικής ακαμψίας είναι πολύ συντηρητική και δίνει συγκρίσιμα αποτελέσματα μόνο όταν το επιβαλλόμενο φορτίο είναι πολύ μικρό σε σχέση με το κρίσιμο φορτίο λυγισμού του υποστυλώματος ή εάν το υποστυλώμα δεν είναι πολύ λυγηρό ( $\lambda \approx \lambda_{lim}$ ). Πολύ λυγηρά ή με μεγάλο επιβαλλόμενο φορτίο υποστυλώματα δεν μπορούν να αναλυθούν με τη μέθοδο αυτή.

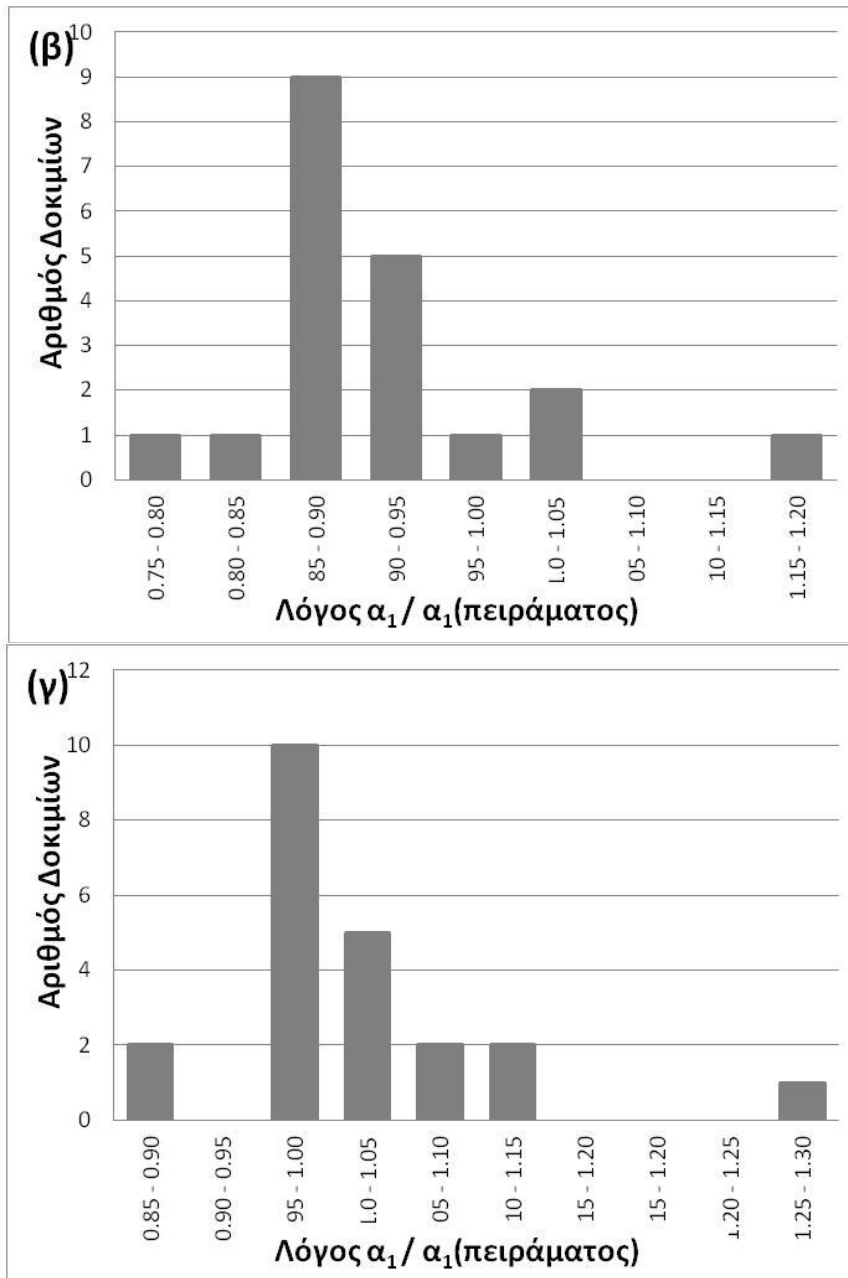
Η μέθοδος της ονομαστικής καμπυλότητας δίνει πιο ακριβή αποτελέσματα, αλλά είναι εις βάρος της ασφαλείας για υποστυλώματα με μακροχρόνια επιβαλλόμενα

σημαντικά φορτία, δηλαδή όταν υπάρχει ερπυσμός. Με τη μέθοδο αυτή, γίνεται υποεκτίμηση της επίδρασης του ερπυσμού σε πολύ λυγηρά υποστυλώματα.

Για να είναι ασφαλείς οι υπολογισμοί σε υποστυλώματα που είναι πολύ λυγηρά και έχουν σημαντικά μεγάλης διάρκειας επιβαλλόμενα φορτία, προτείνεται η χρήση της πρόσθετης εκκεντρότητας που προτείνει το CEB-FIB Model Code 1990 (1993). Με αυτή την τροποποίηση, η μέθοδος της ονομαστικής καμπυλότητας δίνει ασφαλή και ρεαλιστικά αποτελέσματα και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον σχεδιασμό όλων των λυγηρών υποστυλωμάτων.



(Σχήμα 4: Συνεχίζεται)



**Σχήμα 4.** (α) Λόγος  $\alpha_1 / \alpha_1$  (πειράματος) βάση της μεθόδου ονομαστικής ακαμψίας, (β) λόγος  $\alpha_2 / \alpha_2$  (πειράματος) βάση της μεθόδου ονομαστικής καμυλότητας και (γ) λόγος  $\alpha_2 / \alpha_2$  (πειράματος) βάση της τροποποιημένης μεθόδου ονομαστικής καμυλότητας ( $K_\phi = 1$  και συνυπολογίστηκε αρχική καμυλότητα  $e_c$  λόγω ερπυσμού κατά τα οριζόμενα στο FIB Model Code 2010 (2010)) για βραχυχρόνιες δράσεις.

## **ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ**

Αυτή η έρευνα υποστηρίχθηκε από το University of Liege και την Ευρωπαϊκή Ένωση στα πλαίσια του προγράμματος FP7-PEOPLE-COFUND-BeIPD.

## **ΑΝΑΦΟΡΕΣ**

ACI 318-14, American Concrete Institute, Building Code Requirements for Structural Concrete and Commentary, Farmington Hills, MI, USA (2014).

Barros, H, Silva, VD, Ferreira, C. Second order effects in slender concrete columns-reformulation of the Eurocode 2 method based on nominal curvature, *Engineering Structures*, 32, 3989-3993 (2010).

Bonet, JL, Romero, ML, Fernandez, MA, Miguel, PF. Design method for slender columns subjected to biaxial bending based on second-order eccentricity, *Magazine of Concrete Research*, 59(1), 3-19 (2007).

Bonet, JL, Romero, ML, Miguel, PF. Effective flexural stiffness of slender reinforced concrete columns under axial forces and biaxial bending, *Engineering Structures*, 33, 881-893 (2011).

CEB-FIB Model Code 1990, Thomas Telford, London, UK (1993).

EN 1992-1-1, Eurocode 2: Design of Concrete Structures – Part 1: General Rules and Rules for Buildings, European Committee for Standardization, Brussels, Belgium (2004).

Fib Model Code 2010, International Federation for Structural Concrete, Lausanne, Switzerland (2010).

Goyal, BB, Jackson, N. Slender concrete columns under sustained load, *Journal of Structural Division ASCE*, 97(11), 2729-2750 (1971).

Kim, JK, Yang, JK. Buckling behaviour of slender high-strength concrete columns, *Engineering Structures*, 17(1), 39-51 (1995).

Leite, L, Bonet, JL, Pallares, L, Miguel, PF, Fernandez-Prada, MA. Experimental research on high strength concrete slender columns subjected to compression and uniaxial bending with unequal eccentricities at the ends, *Engineering Structures*, 48, 220-232 (2013).

Melo, CEL, Analise experimental e numerica de pilares birrotulados de concreto armado submetidos a flexo-compressao normal, PhD Thesis, University of Brasilia, Brasil (2009).