

**Επιρροή της διαξονικής έντασης στις ανελαστικές ιδιότητες δομικών μελών από οπλισμένο σκυρόδεμα**  
**Influence of biaxial stress to inelastic properties of structural RC members**

**Εμμανουήλ ΒΟΥΓΙΟΥΚΑΣ<sup>1</sup>, Αθανάσιος ΣΤΑΜΟΣ<sup>2</sup>**

*Λέξεις κλειδιά: σκυρόδεμα, διαξονική ένταση, ανελαστική παραμόρφωση.*  
*Keywords: concrete, biaxial stress, inelastic deformation*

**ΠΕΡΙΛΗΨΗ :** Στην παρούσα εργασία αναπτύσσεται μια αναλυτική μέθοδος για την εκτίμηση της επιρροής της διαξονικότητας στην παραμορφωσιμότητα και στην πλαστιμότητα των δομικών μελών από οπλισμένο σκυρόδεμα. Για τα ανελαστικά παραμορφωσιακά μεγέθη, έγινε προσπάθεια να ποσοτικοποιηθεί η συνεισφορά των καμπτικών ρωγμών που σχηματίζονται και διευρύνονται.

**ABSTRACT :** An analytical method has been developed, in order to determine the influence of biaxial stresses, applied to concrete members, to their deformability and ductility. Influence of cracking to analytical deformation model has been investigated.

## **ΕΙΣΑΓΩΓΗ**

Η ανελαστική ανάλυση κερδίζει τα τελευταία χρόνια έδαφος, όσον αφορά την μελέτη δομημάτων από οπλισμένο σκυρόδεμα καθώς θεωρείται η πλέον ακριβής. Οι σχετικοί κανονισμοί (EN 1998-3, ΚΑΝΕΠΕ, ACI SP-17M-09, ASCE7-05 κτλ) έχουν θεσπίσει εμπειρικές σχέσεις για τον προσδιορισμό της καμπυλότητας διαρροής και αστοχίας διατομών, όπως και για τη συνολική ικανότητα στροφής χορδής μελών στην οριακή κατάσταση αστοχίας. Οι σχέσεις έχουν προσδιορισθεί βάσει μαθηματικής επεξεργασίας μεγάλου αριθμού πειραματικών αποτελεσμάτων, ενώ δεν έχουν προταθεί, μέχρι τώρα, αντίστοιχα θεωρητικά προσομοιώματα. Τα ως άνω πειραματικά αποτελέσματα βασίζονται, αποκλειστικά, σε μονοαξονική καταπόνηση. Αν και σε επίπεδο αντοχής έχουν αναπτυχθεί ιδιαίτερα επιτυχημένα προσομοιώματα και λογισμικό για διαξονική καταπόνηση (Bonet et al, 2004,

<sup>1</sup> Δρ Πολιτικός Μηχανικός, Λέκτορας, Σχολή Πολιτικών Μηχανικών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, email: [manolis@central.ntua.gr](mailto:manolis@central.ntua.gr)

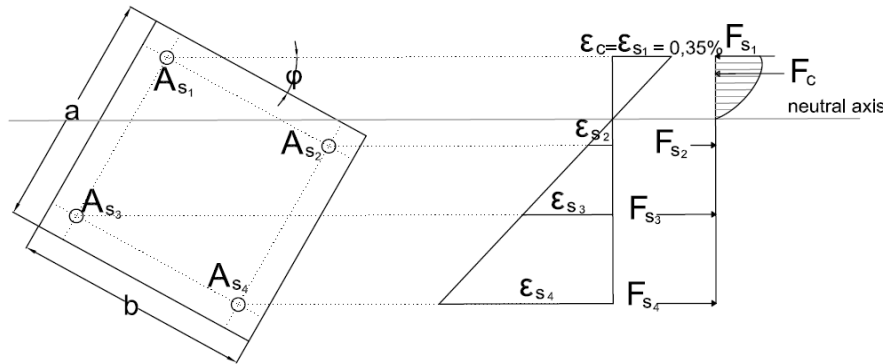
<sup>2</sup> Δρ Πολιτικός Μηχανικός, ΕΔΙΠ, Σχολή Πολιτικών Μηχανικών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, email: [stamthan@central.ntua.gr](mailto:stamthan@central.ntua.gr)

Charalampakis and Koumouisis, 2008, Fossetti and Papia, 2012, Papanikolaou and Sextos, 2016), δεν έχει υπάρξει αντίστοιχη πρόοδος σε επίπεδο ανελαστικής ανάλυσης.

Με την παρούσα εργασία γίνεται μια προσπάθεια για την εκτίμηση της επιρροή της διαξονικότητας στην παραμορφωσιμότητα (σε συνδυασμό με την αντοχή) δομικών μελών από οπλισμένο σκυρόδεμα.

## ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΜΑ

Θεωρούμε μια διατομή ορθογωνικής μορφής, η οποία υπόκειται ταυτόχρονα στις καμπτικές ροπές  $M_x$ ,  $M_y$  και την αξονική δύναμη  $N$  (θεωρούμενη θλιπτική). Ο ουδέτερος άξονας της διατομής (πλαγιογώνιος) σχηματίζει τότε γωνία  $\varphi$  με την μία παρειά της διατομής, ώστε  $\tan(\varphi) = M_y / M_x$  (Σχήμα 1). Στην περίπτωση μονοαξονικής κάμψης,  $\varphi = 0$ .



Σχήμα 1. Ανηγμένες παραμορφώσεις και εσωτερικές δυνάμεις σε ορθογωνική διατομή οπλισμένου σκυροδέματος υπό διαξονική κάμψη

### Υπολογισμός Αξονικής Δύναμης και Καμπτικής Ροπής

Η αξονική δύναμη και η καμπτική ροπή υπολογίζονται από τις τάσεις του σκυροδέματος και των ράβδων οπλισμού (Βουγιούκας & Στάμος, 2016):

$$\begin{aligned} N &= N_{co} + N_{st} = \iint \sigma_{co}(y') dx' dy' + \sum \sigma_{st}(y'_i) \pi d_i^2 / 4 \\ M_x' &= M_{x',co} + M_{x',st} = \iint y' \sigma_{co}(y') dx dy + \sum y'_i \sigma_{st}(y'_i) \pi d_i^2 / 4 \end{aligned} \quad (1)$$

Τα ολοκληρώματα υπολογίζονται με αριθμητική ολοκλήρωση (Press et al, 1992). Ο ουδέτερος άξονας  $x'$  θεωρείται εν γένει μη οριζόντιος και οι τροπές μεταβάλλονται γραμμικά ως προς τον άξονα  $y'$ . Η θλιπτική τροπή  $\epsilon_{up}$  της άνω ίνας της διατομής, και η τροπή  $\epsilon_{down}$  της κατώτατης ράβδου στην κάτω ίνα της διατομής

θεωρούνται γνωστές για τον υπολογισμό των Εξισώσεων 1. Για τον υπολογισμό της ροπής διαρροής  $M^y_x$  θέτουμε ως  $\epsilon_{up}$  την τροπή διαρροής του σκυροδέματος ή ως  $\epsilon_{down}$  την παραμόρφωση διαρροής του χάλυβα. Η τροπή στην αντίθετη ίνα υπολογίζεται από την εξίσωση 1 θέτοντας  $N=N_f$  όπου  $N_f$  είναι η αξονική δύναμη που επιβάλλεται στη διατομή. Η μέγιστη καμπτική ροπή  $M^R_y$  υπολογίζεται ομοίως θέτοντας ως  $\epsilon_{up}$  ή  $\epsilon_{down}$  την παραμόρφωση θραύσης του σκυροδέματος ή του χάλυβα αντίστοιχα.

### Υπολογισμός Κλίσης Ελαστικής Γραμής

Η καμπυλότητα του υποστυλώματος σε κάποιο σημείο του άξονα  $z$  του υποστυλώματος δίνεται:

$$\frac{1}{R} = v''(z) = \frac{\epsilon_{down} - \epsilon_{up}}{d} \quad (2)$$

Όπου οι θλιπτικές τροπές είναι αρνητικές και  $d$  είναι η απόσταση των 2 τροπών κατά μήκος του άξονα  $y'$ . Αριθμητική ολοκλήρωση της καμπυλότητας ως προς τον άξονα  $z$ , δίνει τη κλίση της ελαστικής γραμμής. Θεωρώντας υποστύλωμα μήκους  $L$  με συμμετρικές ροπές  $M_{max}$  στα άκρα του, η καμπτική ροπή μεταβάλλεται γραμμικά κατά μήκος του άξονα  $z$  και μηδενίζεται στο μέσο του. Αν η αρχή των αξόνων είναι το μέσο του υποστυλώματος, η καμπτική ροπή δίνεται:

$$M(z) = \frac{M_{max}}{L/2} z \quad (3)$$

Για να υπολογιστούν οι τροπές  $\epsilon_{up}$  και  $\epsilon_{down}$  κατά μήκος του άξονα  $z$ , υπολογίζεται αρχικά η σχέση της καμπτικής ροπής με τις τροπές, θεωρώντας ένα πλήθος τιμών της  $\epsilon_{up}$  μεταξύ 0 και 0.0035 που είναι η συμβατική παραμόρφωση θραύσης του σκυροδέματος. Για κάθε τιμή της  $\epsilon_{up}$  υπολογίζεται η  $\epsilon_{down}$  έτσι ώστε να ικανοποιείται η Εξίσωση όταν η  $N=N_f$ , όπου  $N_f$  είναι η (γνωστή) αξονική δύναμη που καταπονεί τη διατομή. Ο υπολογισμός γίνεται με συνδυασμό των αλγορίθμων εξαντλητικής και δυαδικής αναζήτησης (Press et al 1992), δηλαδή, πρακτικά, η αξονική δύναμη  $N$  υπολογίζεται για πολλές διαδοχικές τιμές της τροπής  $\epsilon_{down}$  από  $\epsilon_{up}$  έως την τροπή θραύσης του χάλυβα (0.07) και επιλέγεται η τροπή αυτή που δίνει  $N=N_f$ . Ας σημειωθεί ότι οι συνδυασμοί  $\epsilon_{up}$  και  $N_f$  δεν είναι όλοι αποδεκτοί, καθώς για μία δεδομένη  $\epsilon_{up}$  η αξονική  $N_f$  μπορεί αρκετά μεγάλη για μην την αντέχει διατομή, ή αρκετά μικρή έτσι ώστε να μην ισορροπεί η διατομή.

Από τις τιμές  $\epsilon_{up}$  και  $\epsilon_{down}$  υπολογίζεται η καμπτική ροπή  $M_y$  σύμφωνα με τις Εξισώσεις 1 και η καμπυλότητα  $v''$  σύμφωνα με την Εξίσωση 2 και έτσι ορίζεται η (αριθμητική) σχέση  $v''=v''(M)$  μεταξύ ροπής και καμπυλότητας όπως φαίνεται στο **Σχήμα 2**. Συνδυάζοντας αυτή τη σχέση με την Εξίσωση 3 καταλήγουμε:

$$v''(z) = v''(M) = v''(M(z)) = v''\left(\frac{M_{max}}{L/2} z\right) \quad (4)$$

Ολοκλήρωση της Εξίσωσης 4 δίνει την κλίση της ελαστικής γραμμής:

$$v'(z) = \int_0^z v''(u) du = \int_0^z v'' \left( \frac{M_{max}}{L/2} u \right) du \quad (5)$$

Το ολοκλήρωμα υπολογίζεται αριθμητικά για πολλές διαδοχικές τιμές του  $z$  από 0 έως  $L/2$  προκειμένου να οριστεί αριθμητικά η σχέση  $v'(z)$ .

### Υπολογισμός Γωνίας Στροφής

Το βέλος κάμψης δίνεται από την αριθμητική ολοκλήρωση της Εξίσωσης 5:

$$v = v(M_{max}) = \int_0^{L/2} v'(z) dz \quad (6)$$

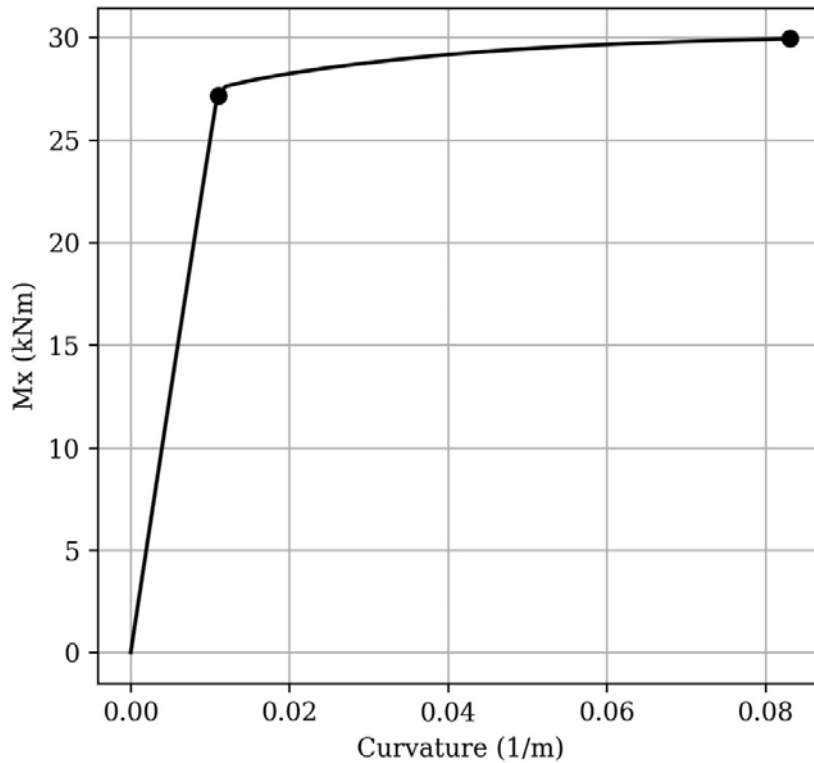
Ας σημειωθεί ότι η καμπτική ροπή μεταβάλλεται από 0 έως  $M_{max}$  (Εξίσωση 3) και έτσι το βέλος κάμψης αλλά και η κλίση της ελαστικής γραμμής είναι συναρτήσεις της  $M_{max}$ . Η γωνία στροφής υπολογίζεται ως:

$$\theta_{chord} = \theta_{chord}(M_{max}) = \frac{v(M_{max})}{L/2} \quad (7)$$

Για να οριστεί η σχέση της καμπτικής ροπής και της γωνίας στροφής  $\theta_{chord}$ , υπολογίζουμε τη  $\theta_{chord}$  για πολλές (πχ 200) διαδοχικές τιμές της  $M_{max}$  μεταξύ 0 και  $M_{x'}^R$ , συμπεριλαμβανομένης της ροπής διαρροής  $M_{x'}^y$ .

$$\theta_{chord} = \theta_{chord}(M_{max}) = \frac{v(M_{max})}{L/2} \quad (7)$$

Για να οριστεί η σχέση της καμπτικής ροπής και της γωνίας στροφής  $\theta_{chord}$ , υπολογίζουμε τη  $\theta_{chord}$  για πολλές (πχ 200) διαδοχικές τιμές της  $M_{max}$  μεταξύ 0 και  $M_{x'}^R$ , συμπεριλαμβανομένης της ροπής διαρροής  $M_{x'}^y$ .



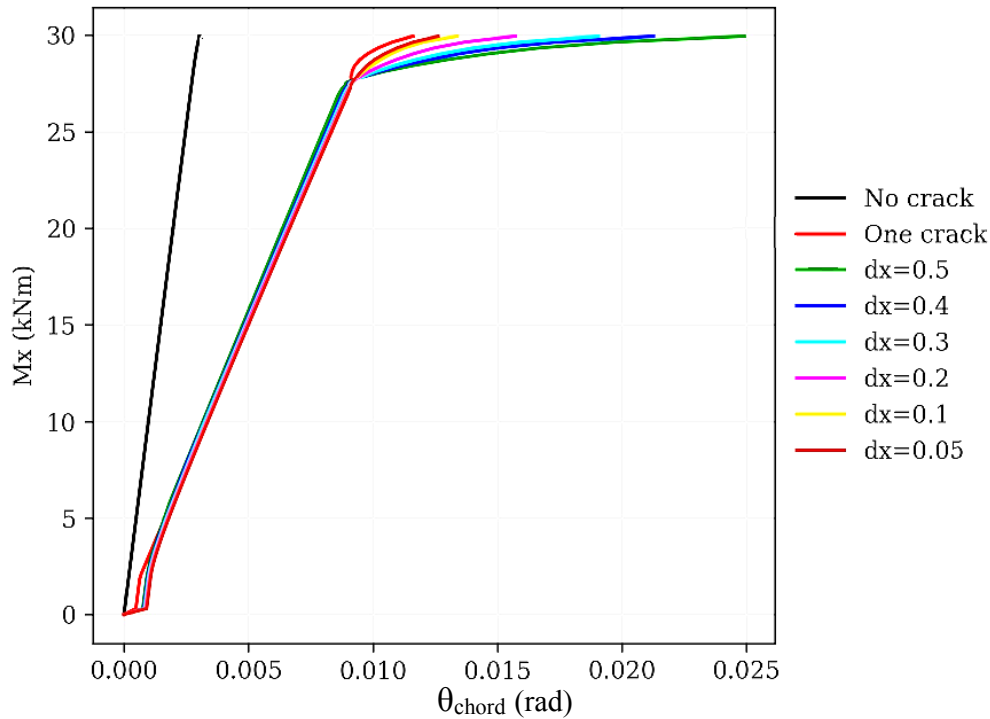
**Σχήμα 2.** Μεταβολή καμπτικής ροπής σε σχέση με την καμπυλότητα. Οι κύκλοι αντιστοιχούν στις  $M_y$  και  $M_R$ . Διατομή 30x30, ράβδοι 4Φ14, μονοαξονική κάμψη.

### Υπολογισμός Γωνίας Στροφής με Ρωγή

Όταν η εφελκυστική τάση ξεπερνά της εφελκυστική αντοχή του σκυροδέματος δημιουργούνται ρωγμές. Το συνολικό άνοιγμα των ρωγμών είναι η συνολική μετατόπιση των ράβδων, μείον την συνολική μετατόπιση του σκυροδέματος που οφείλεται σε εφελκυστικές τάσεις μικρότερες από την εφελκυστική του αντοχή, και η οποία μπορεί να αγνοηθεί ως αμελητέα. Η συνολική μετατόπιση των ράβδων είναι το ολοκλήρωμα της τροπής στη θέση των ράβδων:

$$\Delta L = \Delta L(M_{max}) = \int_0^{L/2} \varepsilon_{down}(z) dz \quad (8)$$

Ας σημειωθεί ότι η  $\varepsilon_{down}$  υπολογίζεται ως παραπροϊόν του υπολογισμού της καμπτικής ροπής σε σχέση με την καμπυλότητα (Εξίσωση 4). Έτσι η αριθμητική σχέση  $\varepsilon_{down}(M)$  είναι διαθέσιμη και μπορεί να μετατραπεί σε  $\varepsilon_{down}(z)$  παρομοίως με την Εξίσωση 5.



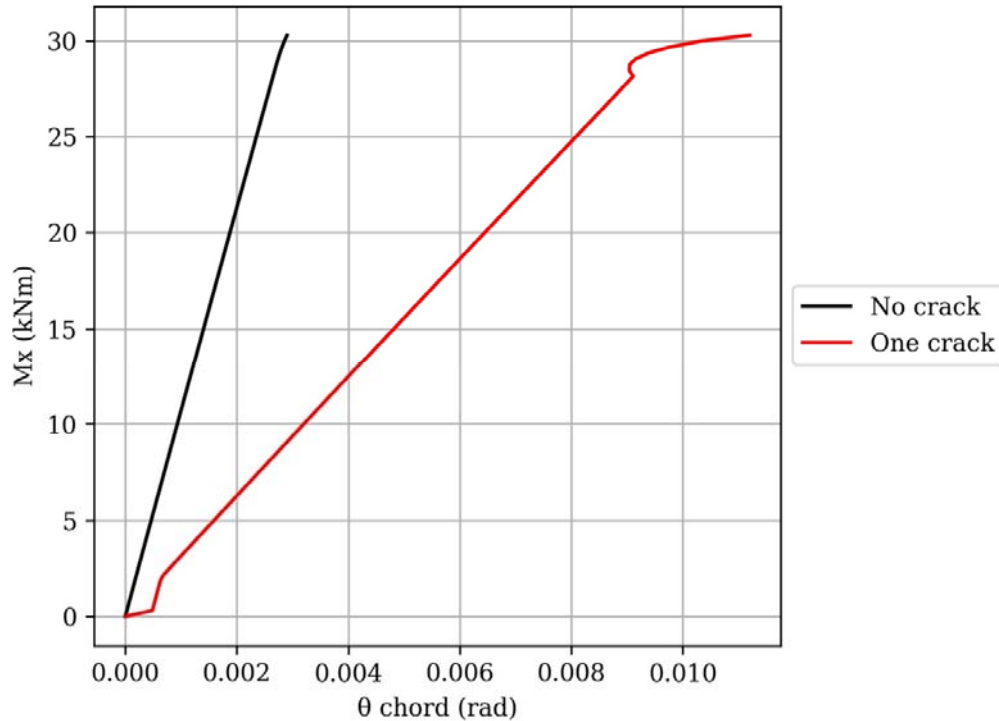
**Σχήμα 3.** Μεταβολή καμπτικής ροπής σε σχέση με την  $\theta_{chord}$  ως συνάρτηση του εύρους των ρωγμών (το συνολικό εύρος όλων των ρωγμών θεωρείται σταθερό). Διατομή 30x30, ράβδοι 4Φ14, μονοαξονική κάμψη.

Διερευνήθηκε αρχικά η επίδραση του αριθμού των ρωγμών στο προσομοίωμα, με σταθερό το άθροισμα του ανοίγματος όλων των ρωγμών που σχηματίζονται. Όπως γίνεται φανερό από το **Σχήμα 3**, μέχρι την θέση όπου η παραμόρφωση αυξάνει δραματικά (και συνοδεύεται από έντονη πτώση της αντίστασης του φορέα), η απόκριση είναι πρακτικά ανεξάρτητη από τον αριθμό των ρωγμών.

Για απλότητα, μπορεί να γίνει η παραδοχή ότι σχηματίζεται μία μεγάλη ρωγμή στη θέση της μέγιστης ροπής  $M_{max}$  ( $z=L/2$ ), της οποίας το άνοιγμα είναι όλη η μετατόπιση  $\Delta L$  (Εξίσωση 8). Η ρωγμή εκτείνεται καθ ύψος από την κάτω ίνα της διατομής έως τον ουδέτερο άξονα που αρχίζει η θλιβόμενη ζώνη. Το ύψος αυτό της ρωγμής είναι ίσο με το ύψος  $d_{tens}$  της εφελκυστικής ζώνης. Θεωρώντας ότι η ρωγμή αναπτύσσεται περίπου τριγωνικά, η γωνία της ρωγμής δημιουργεί προσθετη γωνία στροφής:

$$\theta_{chord,crack} = \theta_{chord,crack}(M_{max}) = \frac{\Delta L}{d_{tens}} \quad (9)$$

Αυτή η γωνία πρέπει να προστεθεί στη γωνία στροφής της Εξίσωσης 7. Η επίδραση της ρωγμής στη γωνία στροφής είναι αξιοσημείωτη, όπως φαίνεται στο **Σχήμα 4**.



**Σχήμα 4.** Μεταβολή καμπτικής ροπής σε σχέση με την  $\theta_{\text{chord}}$  συνυπολογιζομένης της επιρροής μιας και μόνης ρωγμής στη θέση μέγιστης ροπής. Διατομή 30x30, ράβδοι 4Φ14, μονοαξονική κάμψη.

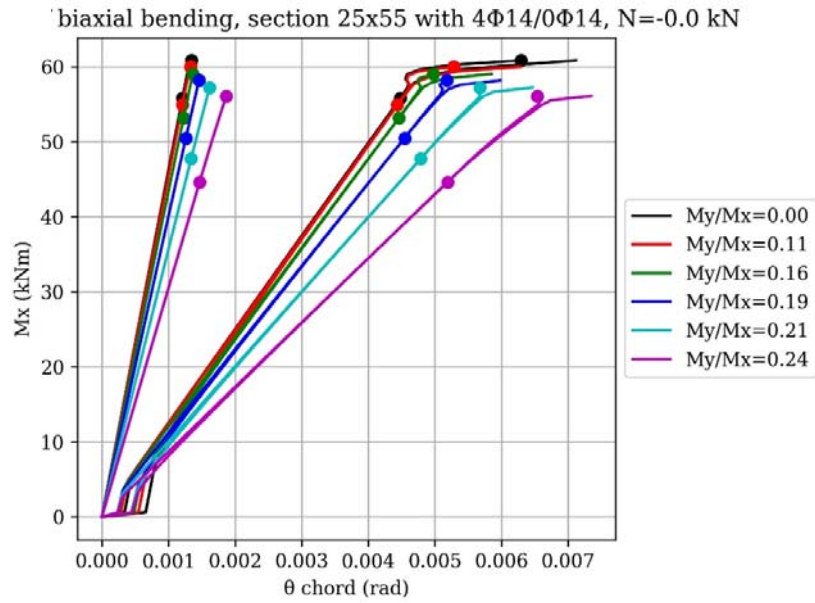
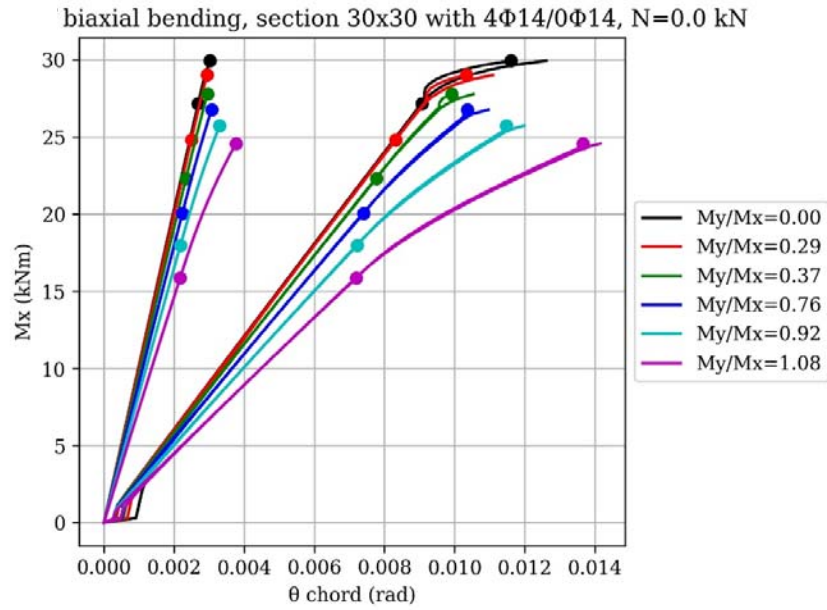
## ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Εξετάστηκαν τυπικές διατομές μελών, με διαφορετικό οπλισμό και κατηγορίες υλικών, υπό μονοαξονική και διαξονική κάμψη και αξονική δύναμη.

Το μήκος του κάθε μέλους θεωρήθηκε 3 m και εξετάστηκε το τμήμα του από το μέσο του μέχρι το ένα άκρο του. Οι συντελεστές ασφαλείας των υλικών θεωρήθηκαν μοναδιαίοι, η επικάλυψη του οπλισμού ήταν 3 cm και οι συνδετήρες Φ8/150, δίτητοι.

Στο Σχήμα 5 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για δυο δοκούς ορθογωνικής διατομής.

Από αυτά προκύπτει ότι η θεώρηση της ρωγμής στο προσομοίωμα δίνει 4-5 φορές μεγαλύτερες τιμές στο προσομοίωμα, από ό,τι αν αυτή αγνοηθεί, άρα οδηγεί σε ρεαλιστικότερη εκτίμηση της σχέσης  $M-\theta_{\text{chord}}$ .



**Σχήμα 5.** Αναλυτικές σχέσεις  $M/\theta_{\text{chord}}$  συνυπολογιζομένης της επιρροής μιας και μόνης ρωγμής ανά στήριξη αμφίπακτης ορθογωνικής δοκού για διατομές 30x30 (άνω) και 25x55 κάτω, ράβδοι 4Φ14 (στις γωνίες), διαξονική κάμψη.



Επίσης, αξιοσημείωτη είναι η δυσμενής επιρροή που έχει η διαξονική κάμψη στην παραμορφωσιακή ικανότητα των μελών από σκυρόδεμα.

## ΑΝΑΦΟΡΕΣ

*Άρθρα σε επιστημονικά περιοδικά*

ASCE7-05 (2010), Minimum design loads for buildings and other structures – revision of ACSE 7-89 American Society of Civil Engineers, Reston, Virginia.

Bonet J., Miguel P.F., Fernandez M.A., Romero M.L., (2004), Analytical approach to failure surfaces in reinforced concrete sections subjected to axial loads and biaxial bending, J Struct Eng (ASCE), 130(12), pp. 2006–2015.

Eurocode 8: Design of structures for earthquake resistance – Part 3: Assessment and retrofitting of building, European Committee for Standardization, Brussels.

Charalampakis A.E., Koumousis V.K. (2008), Ultimate strength analysis of composite sections under biaxial bending and axial load, Advanced Engineering Software 39, pp. 923-936.

Fossetti, M., Papia M., (2012), Dimensionless analysis of RC rectangular sections under axial load and biaxial bending, Engineering Structures 44, pp. 1-17.

Gouldstone, A., Shen, Y-L., Suresh, S. & Thompson, C.V., “Evolution of stress in passivated and unpassivated metal interconnects”. J. Materials Research, Vol. 13, No 7 (1998) 1956-1966 ACI SP-17M-09 (2010), ACI design handbook – design of structural reinforced concrete elements in accordance with ACI 318 SM-05, ACI American Concrete Institute, Farmington Hills, Michigan.

Makarios T., Asteris P. Numerical Investigation of Seismic Behavior of Spatial Asymmetric Multi-Storey Reinforced Concrete Buildings with Masonry Infill Walls, The Open Construction and Building Technology Journal, 6, (Suppl 1-M8) 113-125.

Panagiotakos T, Fardis M. (2001), Deformations of reinforced concrete members at yielding and ultimate ACI Structural Journal, Volume 98, Issue 2, pp. 135-148.

Papanikolaou, V.K., Sextos A.G, (2016), Design charts for rectangular R/C columns under biaxial bending: A historical review toward a Eurocode-2 compliant update, Engineering Structures 44, pp. 34-45.

Vaz Rodrigues R. (2015), A new technique for ultimate limit state design of arbitrary shape RC sections under biaxial bending, Engineering Structures 104, pp 34-45

*Βιβλία*

Press. W.H., Flannery. B.P., Teukolsky. S.A. & Vetterling W.T., «Numerical Recipes in FORTRAN: The Art of Scientific Computing», 2<sup>nd</sup> ed., Cambridge University Press, Cambridge (1992)

*Άρθρα σε διεθνή επιστημονικά συνέδρια (δημοσιευμένα σε πρακτικά)*

Βουγιούκας, Ε. & Στάμος, Α.Α., “Επιρροή της διαξονικότητας στις καμπλότητες διαρροής και αστοχία και στις γωνίες στροφής-χορδής και πλαστική στροφή”, στα Πρακτικά 17<sup>ου</sup> Πανελληνίου Συνεδρίου Σκυροδέματος «Κατασκευές από Σκυρόδεμα» (Θεσσαλονίκη Ελλάδα, 10-12 Σεπτεμβρίου, 2016)

*Κανονισμοί*

ΚΑΝΕΠΕ (2012), Κανονισμός Επεμβάσεων, Οργανισμός Αντισεισμικού Σχεδιασμού και Προστασίας (ΟΑΣΠ), ΥΠΕΚΑ, Αθήνα.