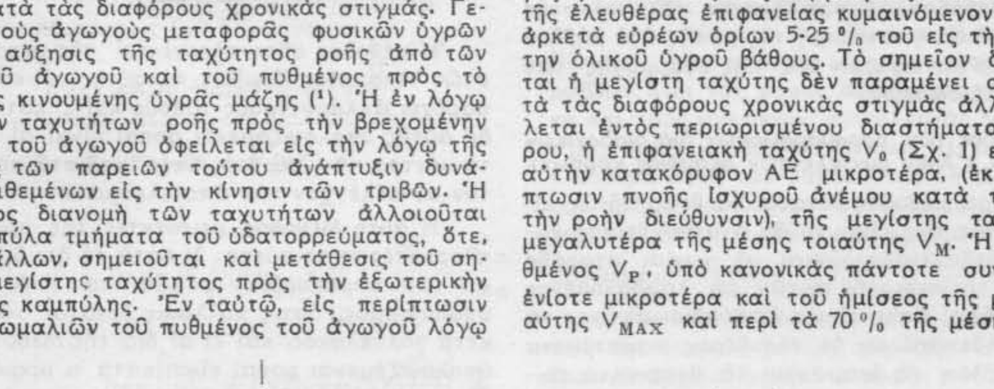
ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΟΥ ΤΡΟΠΟΥ ΔΙΑΝΟΜΗΣ ΤΩΝ ΤΑΧΥΤΗΤΩΝ ΕΙΣ ΑΓΩΓΟΥΣ ΕΛΕΥΘΕΡΑΣ ΡΟΗΣ ΜΕΘΟΔΟΣ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΥ ΤΟΥ ΝΟΜΟΥ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ ΤΩΝ ΚΑΘΕΤΩΝ ΤΑΧΥΤΗΤΩΝ

Ὑπὸ τοῦ κ. ΠΡΑΞΙΤΕΛΟΥΣ ΑΡΓΥΡΟΠΟΥΛΟΥ, Πολ. Μηχανικοῦ,
Προϊσταμένου τοῦ Γραφείου Ὑδρολογικῶν Ἐρευνῶν (Δ4) Υ.Δ.Ε.

Ἡ κατὰ τὴν ἔννοιαν τοῦ πλάτους ὅσον καὶ τοῦ βάθους γνῶσις τοῦ τρόπου διανομῆς τῶν ταχυτήτων ὑγροῦ κινουμένου ἐντὸς ἀγωγοῦ ἐλευθέρας ροῆς, κλειστοῦ ἢ ἀνοικτοῦ σχήματος ἐγκαρσίου διατομῆς, ἀποτελεῖ ὑδραυλικὸν θέμα σοβαρωτάτης σημασίας καὶ σπουδαιότητος ὑπεισερχόμενον συνηθέστατα κατὰ τὴν ἔρευναν καὶ τὴν ἐπίλυσιν διαφόρων ὑδραυλικῶν, ὑδρομετρικῶν ὅσον καὶ καθαρῶς ὑδροτεχνικῶν προβλημάτων. Μὲ τὴν ἐργαστηριακὴν καὶ ἐν ὑπαίθρῳ, εἰς διάφορα ὑδατορρεύματα, μελέτην καὶ διερεύνησιν τοῦ ἐν λόγῳ θέματος ὅσον καὶ μὲ τὴν προσπάθειαν ὑπαγωγῆς τῶν πορισμάτων τῶν σχετικῶν ἐρευνῶν εἰς κανόνας, μὲ σκοπὸν τὴν διατύπωσιν μαθηματικῶν παραστάσεων, ἠσχολήθησαν κατὰ καιροὺς διάφοροι ὑδραυλικοὶ τοῦ παρελθόντος ὅσον καὶ τοῦ παρόντος αἰῶνος, χωρὶς μέχρι τοῦδε νὰ ἐπιτευχθῇ ἡ ἐπίλυσις τοῦ ὅλου θέματος ἐν τῷ συνόλῳ του.

Ὡς εἶναι γνωστόν, ἡ ταχύτης ροῆς τῶν ὑδατίνων ἢ ροηφόρων γραμμῶν ἐν μιᾷ ἐγκαρσίῳ διατομῇ ὑγροῦ ρεύματος ἐντὸς φυσικοῦ τινος ἢ τεχνητοῦ ἀγωγοῦ ὄχι μόνον δὲν εἶναι ἡ αὐτὴ διὰ τὰ διάφορα σημεῖα ταύτης, μεταβαλλομένη ἀπὸ θέσεως εἰς θέσιν, ἀλλὰ καὶ διὰ τὸ αὐτὸ σημεῖον δὲν παραμένει σταθερὰ κατὰ τὰς διαφόρους χρονικὰς στιγμάς. Γενικῶς, εἰς τοὺς ἀγωγοὺς μεταφορᾶς φυσικῶν ὑγρῶν σημειοῦται αὔξησις τῆς ταχύτητος ροῆς ἀπὸ τῶν παρειῶν τοῦ ἀγωγοῦ καὶ τοῦ πυθμένος πρὸς τὸ κέντρον τῆς κινουμένης ὑγρᾶς μάζης [1]. Ἡ ἐν λόγῳ μείωσις τῶν ταχυτήτων ροῆς πρὸς τὴν βρεχομένην περίμετρον τοῦ ἀγωγοῦ ὀφείλεται εἰς τὴν λόγῳ τῆς τραχύτητος τῶν παρειῶν τούτου ἀνάπτυξιν δυνάμεων ἀντιτιθεμένων εἰς τὴν κίνησιν τῶν τριβῶν. Ἡ κατὰ πλάτος διανομὴ τῶν ταχυτήτων ἀλλοιοῦται εἰς τὰ καμπύλα τμήματα τοῦ ὑδατορρεύματος, ὅτε, πλὴν τῶν ἄλλων, σημειοῦται καὶ μετάθεσις τοῦ σημείου τῆς μεγίστης ταχύτητος πρὸς τὴν ἐξωτερικὴν παρειὰν τῆς καμπύλης. Ἐν ταὐτῷ, εἰς περίπτωσιν τοπικῶν ἀνωμαλιῶν τοῦ πυθμένος τοῦ ἀγωγοῦ λόγῳ χύτητος καὶ τῶν λοιπῶν συνθηκῶν τῶν ἐπηρεαζουσῶν τὴν ὁμαλὴν ποταμίαν ρῦσιν, ἡ κατὰ πλάτος διανομὴ τῶν ταχυτήτων θὰ πρέπῃ νὰ εἶναι διὰ τὰ διάφορα ἀντίστοιχα σημεῖα ἡ αὐτή, αἱ δὲ καμπύλαι ἴσων ταχυτήτων συμμετρικαὶ ὡς πρὸς τὸν κατακόρυφον ἄξονα συμμετρίας τοῦ ἀγωγοῦ. Πλὴν ὅμως, λόγῳ τοῦ ἀδυνάτου τῆς ἐπιτεύξεως καὶ τηρήσεως ἐν τῇ πράξει τῶν ὡς ἄνω προϋποθέσεων, τοιοῦτον τι δὲν συμβαίνει καὶ ὡς ἐκ τούτου ἡ ταχύτης ροῆς εἰς σημεῖα συμμετρικά, εὑρισκόμενα εἰς τὸ αὐτὸ ἀκριβῶς βάθος ἀπὸ τῆς ἐλευθέρας ὑγρᾶς ἐπιφανείας, δὲν εἶναι ἡ αὐτή, παρουσιαζομένων διαφορῶν, αἵτινες κυμαίνονται, κατὰ τὸ μᾶλλον ἢ ἧττον, ἐντὸς περιωρισμένων ὁρίων. Πάντως, εἰς τὴν παροῦσαν περίπτωσιν τῶν μὲ κανονικὴν διατομὴν ἀγωγῶν αἱ ἰσοταχεῖς καμπύλαι εἶναι ὁμαλαί, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον δὲν συμβαίνει εἰς τοὺς φυσικοὺς ἀγωγούς, ὅπου αὗται εἶναι πολύπλοκοι καὶ κατὰ τὸ πλεῖστον λίαν ἀνώμαλοι.

Ὡς πρὸς τὴν θέσιν τῆς μεγίστης ταχύτητος V_{MAX} (Σχ. 1), αὕτη εἰς περίπτωσιν διωρύγων συμμετρικῆς ἐγκαρσίου διατομῆς λαμβάνει χώραν ἐγγὺς ἢ ἐπὶ τοῦ ἄξονος συμμετρίας καὶ εἰς βάθος ἀπὸ τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας κυμαινόμενον μεταξὺ τῶν ἀρκετὰ εὐρέων ὁρίων 5-25 % τοῦ εἰς τὴν θέσιν ταύτην ὁλικοῦ ὑγροῦ βάθους. Τὸ σημεῖον ὅπου ἐξικνεῖται ἡ μεγίστη ταχύτης δὲν παραμένει σταθερὸν κατὰ τὰς διαφόρους χρονικὰς στιγμὰς ἀλλὰ μεταβάλλεται ἐντὸς περιωρισμένου διαστήματος. Ἀφ' ἑτέρου, ἡ ἐπιφανειακὴ ταχύτης V_o (Σχ. 1) εἶναι διὰ τὴν αὐτὴν κατακόρυφον ΑΕ μικροτέρα, (ἐκτὸς εἰς περίπτωσιν πνοῆς ἰσχυροῦ ἀνέμου κατὰ τὴν αὐτὴν μὲ τὴν ροὴν διεύθυνσιν), τῆς μεγίστης ταχύτητος, καὶ μεγαλυτέρα τῆς μέσης τοιαύτης V_M. Ἡ ταχύτης πυθμένος V_P, ὑπὸ κανονικὰς πάντοτε συνθήκας, εἶναι ἐνίοτε μικροτέρα καὶ τοῦ ἡμίσεος τῆς μεγίστης τοιαύτης V_{MAX} καὶ περὶ τὰ 70 % τῆς μέσης. Ὡς πρὸς



Σχ. 1

διαβρώσεων, προσχώσεων καὶ ἐμποδίων ἐκ λίθων κ.τ.λ., λαμβάνει χώραν μεταβολὴ εἰς τὴν ἐν γένει διανομὴν τῶν ταχυτήτων ἐν τῷ ἀγωγῷ. Εἰς περίπτωσιν διωρύγων ἐν εὐθυγραμμίᾳ συμμετρικῆς διατομῆς ὡς πρὸς τὸν κατακόρυφον ἄξονα μετὰ πυθμένος ἀπολύτως ὁμαλοῦ καὶ ἐπιπέδου, τηρουμένων ὑπὸ ἀρίστας καὶ ὁμοιομόρφους συνθήκας ἀπὸ ἀπόψεως τρα- δὲ τὴν ταχύτητα V_t εἰς τὸ ἥμισυ τοῦ ὅλου βάθους t εἰς τὴν θεωρουμένην θέσιν, αὕτη κυμαίνεται μεταξὺ 94—98 % τῆς μεγίστης διὰ τὴν αὐτὴν κατακόρυφον, καὶ 1,02—1,06 τῆς μέσης V_M. Γενικῶς, εἶναι δυνατὸν νὰ δεχθῶμεν, ὅτι κατὰ μέσον ὅρον καὶ διὰ τὰς συνήθεις ἐν τῇ πράξει περιπτώσεις ροῶν ἰσχύει ἡ σχέσις :

$$\frac{V_{MAX}}{5} = \frac{V_M}{4} = \frac{V_P}{3}$$

(1) Βλέπε πλείονα: «ΥΔΡΑΥΛΙΚΗ», Πρ. Ἀργυροπούλου, σελ. 297, 1951.

ἐνῷ διὰ βραδείας ροὰς ἡ :

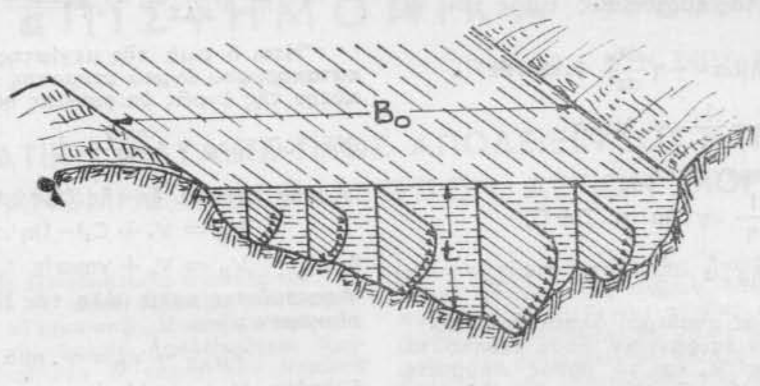
$$\frac{V_{MAX}}{4} = \frac{V_M}{3} = \frac{V_P}{2}$$

Τέλος, ἡ μέση ταχύτης ἐπὶ μιᾶς κατακορύφου εὑρίσκεται εἰς βάθος κυμαινόμενον μεταξὺ 0,55 καὶ 0,65 τοῦ ὁλικοῦ βάθους εἰς τὴν ὑπ' ὄψιν θέσιν, μὲ μέσην τιμὴν 0,60. Ἐνῷ δὲ δι' ἐργαστηριακὰς ἐρεύνας λαμβάνεται $V_M = 0.99\,V_{0,58t}$ ἢ ἀκριβέστερον : $V_M = 0{,}499\,(V_{0,18t} + V_{0,82t})$, ἐν τῇ πράξει, καὶ διὰ τὴν περίπτωσιν τῶν συνήθων ὑδρομετρήσεων διὰ ρευματομέτρου (κοινῶς μυλίσκου), δεχόμεθα $V_M = V_{0,60t}$ ἢ $V_M = 1/2\,(V_{0,20t} + V_{0,80t})$.

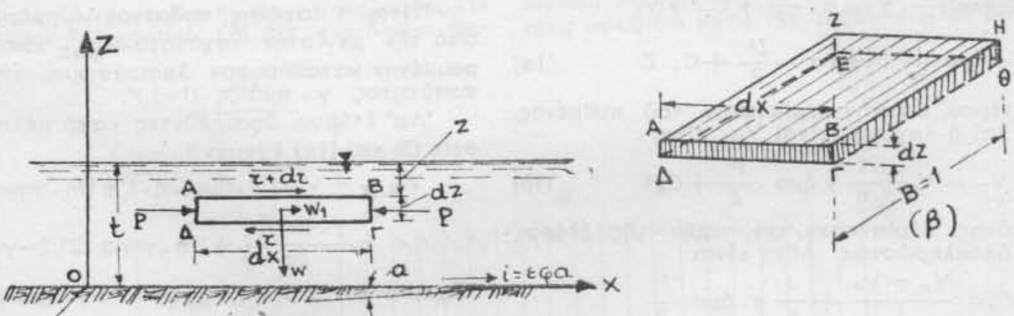
Τὸ πρόβλημα, ὅμως, τὸ ὁποῖον ἀπετέλεσε καὶ ἀποτελεῖ τὸ ἐπίκεντρον τῶν σχετικῶν ἐρευνῶν, εἶναι ἡ ἐξακρίβωσις τοῦ ἐπακριβοῦς νόμου μεταβολῆς τῶν ταχυτήτων κατὰ τὴν ἔννοιαν τοῦ βάθους, ἤτοι τοῦ τρόπου διανομῆς τῶν καθέτων ταχυτήτων καὶ ἡ μαθηματικὴ τούτου ἀπεικόνισις. Ὁ Bazin, ὁ Cunningham, οἱ Humphreys καὶ Albot καὶ πολλοὶ ἄλλοι διὰ μακρῶν πειραμάτων καὶ ἐρευνῶν ἠσχολήθησαν μὲ τὴν ἐπίλυσίν του. Παρὰ δὲ τὸ γεγονός, ὅτι τὸ ὅλον θέμα προωθήθη μέχρι τοῦδε ἱκανοποιητικῶς, ἡ πλήρης τούτου ἐπίλυσις κατέστη μέχρι τοῦδε ἀνέφικτος, κυρίως λόγῳ τῶν ὑπεισερχομένων μεταβλητῶν παραγόντων καὶ συντελεστῶν, ἐξ ὧν ἀδιαλείπτως ἐπηρεάζεται ἡ ρῦσις τοῦ ἐντὸς τῶν ὑδατορρευμάτων ἀπορρέοντος ὕδατος. Κατὰ καιροὺς διετυπώθησαν διάφοροι σχέσεις καθορίζουσαι, προσεγγιστικῶς πάντοτε, τὸν ἐν λόγῳ νόμον μεταβολῆς τῶν ταχυτήτων, αἵτινες ἐπιβεβαιοῦσι τὴν περὶ παραβολικῆς, κατὰ τὴν ἔννοιαν τοῦ βάθους καὶ διὰ τὴν αὐτὴν κατακόρυφον, μεταβολῆς ἄποψιν τοῦ Bazin. Πράγματι, τὸ διάγραμμα τῶν καθέτων ταχυτήτων ἐπιτυχῶς παρίσταται ὑπὸ παραβολῆς μὲ ἄξονα ὁριζόντιον διερχόμενον διὰ τοῦ σημείου τῆς μεγίστης ταχύτητος, ὅπου καὶ ἡ κορυφὴ ταύτης. Εἰς τὸ Σχῆμα 2 παρίσταται σχηματικῶς ἡ παραβολικὴ διανομὴ τῶν ταχυτήτων διὰ διαφόρους θέσεις τῆς κατὰ πλάτος διατομῆς ποταμοῦ. Ἐν προκειμένῳ δίδεται ἐπιτυχὴς μέθοδος προσδιορισμοῦ τοῦ νόμου διανομῆς τῶν καθέτων ταχυτήτων, διὰ τὴν περίπτωσιν μονίμου ἠρέμου ροῆς φυσικοῦ ὑγροῦ, εἰδικοῦ βάρους γ, ἐντὸς διώρυγος μεγάλου πλάτους, ὡς πρὸς τὸ ὑγρὸν συνολικὸν βάθος ταύτης. Δεχόμεθα, ὅτι αἱ δυνάμεις τριβῆς, καὶ μόνον, συνιστῶσι τὰς ἀντιτιθεμένας τοιαύτας εἰς τὴν ροὴν τοῦ ὑγροῦ. Ἔστω ὑγρὸν πρῖσμα ΑΒΓΔ ΕΖΗΘ (Σχ. 3β) τοῦ κινουμένου ἐντὸς τῆς διώρυγος ὑγροῦ, στοιχειώδους πάχους dz, μήκους dx καὶ πλάτους ἴσου πρὸς τὴν μονάδα, κείμενον εἰς βάθος Ζ ἀπὸ τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας τοῦ ρέοντος ὑγροῦ (Σχ. 3α). Θεωρήσωμεν ἐν ταὐτῷ σύστημα ὀρθογωνίων ἀξόνων ΟΧ, ΟΨ, ΟΖ, μὲ τὸν ἄξονα ΟΧ συμπίπτοντα μὲ τὴν διεύθυνσιν ροῆς τοῦ ὑγροῦ ἐν τῷ ἀγωγῷ.

Λόγῳ τῆς κλίσεως i=ἐφ. α τοῦ ἀγωγοῦ, δημιουργεῖται ἐκ τοῦ βάρους W τοῦ θεωρουμένου πρίσματος ἡ κατὰ τὴν διεύθυνσιν ροῆς συνιστῶσα W_1. Ἡ τιμὴ τούτης θὰ εἶναι :

$$W_1 = \gamma\,(dz\,.\,dx1)\,.\,\text{ἡμ.}\alpha$$



Σχ 2



Σχ. 3

Ἀφ' ἑτέρου, κατὰ τὸν Ἄγγλον φυσικὸν καὶ μαθηματικὸν Isaac Newton, ἡ ἀνὰ μονάδα ἐπιφανείας ἐπαφῆς δύναμις τριβῆς, ἤτοι ἡ ἔντασις τῆς ἀναπτυσσομένης διατμητικῆς τάσεως, εἰς ὑγρὸν κινούμενον μὲ ταχύτητα VM/SEC κατὰ τὴν διεύθυνσιν τοῦ κατὰ μῆκος ἄξονος τοῦ ἀγωγοῦ ΟΧ, εἶναι :

$$\tau = \eta\,.\,\frac{dv}{dz}\ \text{Kg/cm}^2$$

ὅπου η τὸ χαρακτηρίζον τὴν συνεκτικότητα τοῦ ὑγροῦ μέτρον, ὅπερ συνιστᾷ τὸν καλούμενον συντελεστὴν συνεκτικότητος, εἰς kg . sec/cm².

Ἡ διαφορὰ τῶν διατμητικῶν δυνάμεων (Σχ. 3α) ἐπὶ τῆς ἄνω καὶ κάτω ἕδρας τοῦ θεωρουμένου πρίσματος ἔσεται:

$$(\tau+d\tau)-(\tau)=d\tau=\frac{d}{dz}\left(\eta\cdot\frac{dv}{dz}\cdot E_0\right).\ dz = \eta\cdot\frac{d^2v}{dz^2}.1.dx.dz$$

ὅπου $E_0=B.dx=1.dx$ εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ καθέτου τῷ ἄξονι ΟΥ ἐπιπέδου τοῦ θεωρουμένου ὑγροῦ πρίσματος. Ἐν τοιαύτῃ δὲ περιπτώσει ἡ συνολικὴ διατμητικὴ δύναμις θὰ εἶναι:

$$\tau=\eta.\frac{dv}{dz}.E_0.$$

Ἤδη. λόγῳ τοῦ γεγονότος ὅτι αἱ ἐνεργοῦσαι ἐπὶ τῶν δύο ἀκραίων ἑδρῶν ΑΔ καὶ ΒΓ τοῦ πρίσματος στατικαὶ δυνάμεις εἶναι ὄχι μόνον ἀντιθέτου φορᾶς ἀλλὰ καὶ ἴσαι, ὡς εὑρισκόμεναι εἰς τὸ αὐτὸ βάθος, ἐνῷ αἱ ἐπιφάνειαι ἐφ' ὧν ἐνεργοῦσιν εἶναι ἴσαι, θὰ ἔχωμεν (Σχ. 3α):

$$p+(\tau+d\tau)+W_1-p-\tau=0$$

ἢ $W_1-dt=0$ Ἤτοι $W_1=-d\tau$

Ἀντικαθιστῶντες τὰς εὑρεθείσας τιμὰς τῶν W_1 καὶ $d\tau$ εὑρίσκομεν:

$$\gamma\,(dz.dx.1)\ \eta\mu.\alpha=-\eta\frac{d^2v}{dz^2}\,1.dx.dz$$

ἢ

$$\frac{d^2v}{dz^2}=-\frac{1}{\eta}.\gamma.\eta\mu.\alpha$$

Ἐκ ταύτης δὲ ἔχομεν ὅτι:

$$\frac{dv}{dz}=-\frac{1}{\eta}.\gamma.\eta\mu.\alpha.Z+C_1$$

καὶ

$$V=-\frac{1}{\eta}\gamma.\eta\mu.\alpha.\frac{Z^2}{2}+C_1.Z+C_2 \qquad (1)$$

Ὅπου C_1 καὶ C_2 αἱ σταθεραὶ ὁλοκληρώσεως.

Διὰ τὴν ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν, ὅπου ἐκδηλοῦται ἡ ἐπιφανειακὴ ταχύτης V_0 καὶ τὸ βάθος ἀποβαίνει $Z=0$, εὑρίσκομεν $V=V_0=C_2$. Ἐν τοιαύτῃ δὲ περιπτώσει ἡ σχέσις (1) γίνεται:

$$V=-\frac{1}{\eta}.\gamma\,\eta\mu\,\alpha.\frac{Z^2}{2}+C_1Z+V_0$$

ἢ

$$V-V_0=\frac{1}{\eta}.\gamma\eta\mu\,\alpha.\frac{Z^2}{2}+C_1.Z \qquad (1\alpha)$$

Ἀφ' ἑτέρου, διὰ τὴν περίπτωσιν τοῦ πυθμένος, ὅπου $Z=t$ καὶ ἡ ταχύτης εἶναι V_P, εἶναι:

$$V=V_P=V_0-\frac{1}{\eta}\gamma\,\eta\mu\alpha.\frac{t^2}{2}+C_1t \qquad (1\beta)$$

Ἐκ ταύτης, εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τῆς ἑτέρας σταθερᾶς ὁλοκληρώσεως. Αὕτη εἶναι:

$$C_1=\frac{V_P-V_0}{t}+\frac{1}{\eta}\gamma.\eta\mu\alpha\,\frac{t}{2}$$

Μετὰ τὸν καθορισμὸν τῆς τιμῆς τῶν σταθερῶν ὁλοκληρώσεως C_1 καὶ C_2, ἡ σχέσις (1) λαμβάνει τὴν μορφήν:

$$V=V_0+\frac{V_P-V_0}{t}.Z+\frac{1}{\eta}.\gamma.\eta\mu\alpha.\frac{t}{2}.Z-\frac{1}{\eta}\gamma.\eta\mu\alpha.\frac{Z^2}{2}$$

ἢ

$$V=V_0+\frac{V_P-V_0}{t}.Z-\gamma\frac{\eta\mu\alpha}{2\eta}Z.(t-Z)$$

Ἡ ἐξίσωσις (1α) γράφεται:

$$V=V_0-\gamma.\frac{\eta\mu\alpha}{2\eta}\left(Z-\frac{C_1.\eta}{\gamma.\eta\mu\alpha}\right)^2+\frac{C_1^2\eta}{2\gamma\eta\mu\alpha} \qquad (2)$$

Πλὴν ὅμως, αὕτη δὲν εἶναι παρὰ ἐξίσωσις παραβολῆς μὲ ὁριζόντιον ἄξονα εἰς βάθος t_1, ἀπὸ τῆς ἐλευθέρας ὑγρᾶς ἐπιφανείας τοῦ ῥέοντος ὑγροῦ, ἴσον πρὸς $\frac{C_1.\eta}{\gamma.\eta\mu\alpha}$.

Ἤδη, πρὸς εὕρεσιν τῆς τιμῆς τῆς μεγίστης ταχύτητος V_{MAX}, δέον νὰ εἶναι: $\frac{dV}{dZ}=0$

Ἀλλὰ $$\frac{dV}{dZ}=\frac{\gamma.\eta\mu\alpha}{\eta}.\left(Z-\frac{C_1.\eta}{\gamma.\eta\mu\alpha}\right)=0.$$

Ἐκ ταύτης εὑρίσκομεν, ὅτι εἰς βάθος $Z=t_1=\frac{C_1.\eta}{\gamma.\eta\mu\alpha}$ ἀναπτύσσεται ἡ μεγίστη ταχύτης. Αὕτη, ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει, θὰ ἔχῃ τιμήν:

$$V=V_{MAX}=V_0+\frac{C_1^2.\eta}{2\gamma\eta\mu\alpha}$$

Ἐπειδὴ δὲ $t_1=\frac{C_1.\eta}{\gamma.\eta\mu\alpha}$, ὅτε $C_1=\frac{\gamma.\eta\mu\alpha}{\eta}.t_1$, ἔχομεν καὶ ὅτι: $V_{MAX}=V_0+\frac{\eta}{2\gamma.\eta\mu\alpha}.\frac{\gamma^2\eta\mu^2\alpha}{\eta^2}.t_1^2$

ἢ $$V_{MAX}=V_0+\frac{\gamma\eta\mu\alpha}{2\eta}.t_1^2 \qquad (3)$$

Ἤτοι ἡ τιμὴ τῆς μεγίστης ταχύτητος ἐπὶ μιᾶς κατακορύφου ὑγροῦ ῥεύματος ἰσοῦται πρὸς τὴν τοιαύτην τῆς ὑγρᾶς ἐπιφανείας ηὐξημένης κατὰ τὴν τιμὴν τοῦ ὅρου $\gamma.\frac{\eta\mu\alpha}{2\eta}\,t_1^2$.

Ἀφ' ἑτέρου, ἐκ τῆς ἐξισώσεως (1β) ἔχομεν:

$$V_P=V_0+C_1t-1/\eta.\gamma\eta\mu\alpha.t^2/2$$

ἢ $$V_P=V_0+\gamma\eta\mu\alpha/\eta.t_1.t-1/\eta.\gamma\eta\mu\alpha.t^2/2 \qquad (4)$$

Ἀφαιροῦντες κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις (3) καὶ (4) εὑρίσκομεν:

$$V_{MAX}-V_P=\gamma.\eta\mu\alpha/2\eta.(t-t_1)^2$$

ἢ ἀκόμη $$V_{MAX}=V_P+\gamma.\eta\mu\alpha/2\eta.(t-t_1)^2$$

εἴτε $$V_P=V_{MAX}-\gamma.\eta\mu\alpha/2\eta.(t-t_1)^2 \qquad (5)$$

Ἤτοι ἡ ταχύτης πυθμένος V_P εὑρίσκεται ἐὰν ἀπὸ τὴν μεγίστην ταχύτητα V_{MAX} κατὰ τὴν θεωρουμένην κατακόρυφον ἀφαιρέσωμεν τὴν τιμὴν τῆς ποσότητος $\gamma.\eta\mu\alpha/2\eta.(t-t_1)^2$.

Ἀφ' ἑτέρου, ἀφαιροῦντες κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις (3) καὶ (1α) ἔχομεν:

$$V_{MAX}-V=\gamma.\eta\mu\alpha/2\eta.t_1^2+1/\eta.\gamma\eta\mu\alpha.Z^2/2-C_1Z.$$

$$=\frac{\gamma.\eta\mu\alpha t_1^2}{2\eta}+1/\eta.\gamma\eta\mu\alpha.Z^2/2-\gamma.\eta\mu\alpha/\eta.t_1.Z$$

Ἔχομεν διὰ $z>t_1$: $V_{MAX}=V+\gamma.\eta\mu\alpha/2\eta.(Z-t_1)^2$ (6)

καὶ διὰ $\tau_1>Z$:

$$V_{MAX}=V+\gamma.\eta\mu\alpha/2\eta.(t_1-Z)^2$$

Ἐκ τῶν ὡς ἄνω ἐξισώσεων εὑρίσκομεν ἐπίσης ὅτι:

$$V=V_{MAX}-\gamma.\eta\mu\alpha/2\eta.(t_1-Z)^2 \qquad (6\alpha)$$

Ἤτοι ἡ ταχύτης ῥοῆς εἰς τυχὸν σημεῖον μιᾶς κατακορύφου γραμμῆς ἰσοῦται πρὸς τὴν τιμὴν τῆς μεγίστης ἐπ' αὐτῆς ταχύτητος V_{MAX} μειουμένης κατὰ τὴν τιμὴν τοῦ ὅρου $\gamma.\eta\mu\alpha/2\eta.(t_1=Z)$.

Θεωρήσωμεν μετὰ ταῦτα τὸ εἰς τὸ Σχῆμα (1) διάγραμμα καθέτων ταχυτήτων. Ἐὰν τὴν μεταξὺ διαγράμματος ὀρθῶν ταχυτήτων ΒΓΔ καὶ κατακορύφου εὐθείας ΑΕ ἐπιφάνειαν μεταβάλωμεν εἰς ὀρθογώνιον ἴσου ἐμβαδοῦ πρὸς τὴν ΑΒΓΔΕΑ, ὕψους δὲ ἴσου πρὸς t, τότε ἡ ἑτέρα διάστασις τοῦ ἐν λόγῳ ὀρθογωνίου παρέχει τὴν μέσην ταχύτητα V_M. Ἤτοι θὰ εἶναι :

$$E_{(ΑΒΓΔΕΑ)} = V_M\, t = \int_0^t V .\, dz = \int_0^t \left[V_{MAX} - \gamma \,.\, \eta\mu\alpha/2\eta \,.\, (t_1 - Z)^2 \right] = dz\,,$$

κατόπιν τῆς σχέσεως (6α).

Ἤτοι $V_M = \frac{1}{t} \int_0^t \left[V_{MAX} - \gamma.\eta\mu\alpha/2\eta \,.\, (t_1 - Z)^2 \right] dz$

$$= 1/t \int_0^t V_{MAX}\, dz - 1/t \int_0^t \gamma \,.\, \eta\mu\alpha/2\eta\, (t_1^2 - 2t_1 Z + Z^2)\, dz$$

$$= V_{MAX} - \gamma \,.\, \eta\mu\alpha/2\eta \,.\, (t^2/3 - tt_1 - t_1^2)$$

$$\text{ἢ } V_{MAX} - V_M = \gamma \,.\, \eta\mu\alpha/2\eta \,.\, (t^2/3 - tt_1 - t_1^2) \qquad (7)$$

Τέλος, πρὸς εὕρεσιν τοῦ βάθους, εἰς δ λαμβάνει χώραν ἡ μέση ταχύτης ροῆς ἐπὶ μιᾶς κατακορύφου γραμμῆς, εὑρίσκομεν ἐκ τῶν σχέσεων (6) καὶ (7) :

$$\gamma \,.\, \eta\mu\alpha/2\eta \,.\, (t_1 - Z)^2 = \gamma \,.\, \eta\mu\alpha/2\eta \,.\, (t^2/3 - tt_1 + t_1^2)$$

$$\text{ἢ } Z^2 - (2t_1) \,.\, Z - (t^2/3 - tt_1) = 0$$

Λύοντες δὲ τὴν ὡς ἄνω ἐξίσωσιν δευτέρου βαθμοῦ εὑρίσκομεν :

$$Z = t_1 + \sqrt{t_1^2 - tt_1 + t^2/3} \qquad (8)$$

Διὰ τὴν περίπτωσιν δὲ τῶν προαναφερθέντων ὁρίων διακυμάνσεως τῆς μεγίστης ταχύτητος 5 μέχρι 25 %, κατόπιν τῆς ὡς ἄνω σχέσεως, θὰ ἔχωμεν διὰ τὰς ἀκραίας τιμὰς τοῦ $t_1 = 0{,}05$ καὶ 0,25, ὅτι :

$$Z_1 = 0{,}05t + \sqrt{(0{,}05t)^2 - 0{,}05t^2 + t^2/3} = 0{,}6349\, t$$

$$\text{καὶ } Z_2 = 0{,}25t + \sqrt{(0{,}25t)^2 - 0{,}25t^2 + t^2/3} = 0{,}6319\, t.$$

ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΑ ΝΕΑ

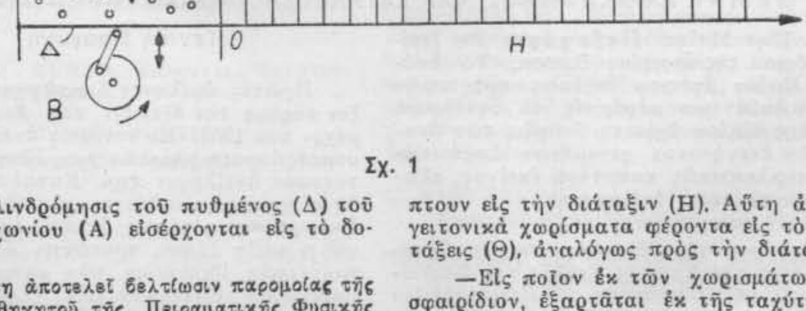
Ὑπὸ τοῦ κ. Θ. Ν. ΣΚΟΥΛΙΚΙΔΗ, Ὑφηγητοῦ Ε.Μ.Π.

ΑΠΛΗ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΤΑΞΙΣ ΠΡΟΣ ΑΠΟΔΕΙΞΙΝ ΤΟΥ ΝΟΜΟΥ MAXWELL ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΤΩΝ ΤΑΧΥΤΗΤΩΝ ΑΕΡΙΩΝ ΜΟΡΙΩΝ

—Ὁ Καθηγητὴς τῆς Πειραματικῆς Φυσικῆς τοῦ Πολυτεχνείου τοῦ Μονάχου Η. Auer ἐπέδειξε καὶ εἰσήγαγεν ἤδη εἰς τὰς ἐν τῷ «Γερμανικῷ Μουσείῳ» παραδόσεις του συσκευήν, διὰ τῆς ὁποίας ἀποδεικνύεται ἀμέσως καὶ μὲ μεγάλην ἀκρίβειαν ὁ νόμος τοῦ Maxwell περὶ κατανομῆς τῶν ταχυτήτων τῶν ἀερίων μορίων (*).

Ἡ συσκευὴ αὕτη ἀπεικονίζεται σχηματικῶς κατωτέρω (Σχ. 1).

—Ἡ λειτουργία τῆς συσκευῆς εἶναι ἡ ἀκόλουθος. Τίθεται εἰς κίνησιν ὁ μηχανισμὸς (Β), διὰ τοῦ ὁποίου ἐπιτυγχάνεται ταχεῖα παλινδρόμησις τοῦ πυθμένος (Δ) τοῦ δοχείου (Γ). Διὰ τοῦ χωνίου (Α) εἰσέρχονται εἰς τὸ δοχεῖον σφαῖραι ἐκ χάλυβος διαμέτρου 2mm. Αἱ σφαῖραι αὗται τιθέμεναι εἰς κίνησιν ὑπὸ τοῦ παλινδρομοῦντος πυθμένος μετατίθενται ταχέως πρὸς ὅλας τὰς κατευθύνσεις, ἀνακλῶνται ἐφ' ὅλων τῶν τοιχωμάτων τοῦ δοχείου καὶ συγκρούονται μεταξύ των. Ἡ διάταξις (Ε) ἐμποδίζει τὴν ἐπανέξοδον τῶν σφαιριδίων. Ἡ τοιαύτη κίνησις τῶν σφαιριδίων εἶναι ἀπολύτως ἀνάλογος πρὸς τὴν κίνησιν ἀερίων μορίων. Εἰς τὸ δεξιὸν τοίχωμα τοῦ δοχείου ὑπάρχει ὀπὴ (Ζ), διὰ τῆς ὁποίας ἐξέρχονται συνεχῶς σφαιρίδια κατὰ τὴν διεύθυνσιν τοῦ βέλους καὶ πίπτουν εἰς τὴν διάταξιν (Η). Αὕτη ἀποτελεῖται ἀπὸ λίαν γειτονικὰ χωρίσματα φέροντα εἰς τὸ ἄνω ἄκρον τὰς διατάξεις (Θ), ἀναλόγως πρὸς τὴν διάταξιν (Ε).



Σχ. 1

—Εἰς ποῖον ἐκ τῶν χωρισμάτων θὰ πέσῃ ἕκαστον σφαιρίδιον, ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς ταχύτητος (w), τὴν ὁποίαν κατεῖχε τοῦτο κατὰ τὴν ἔξοδόν του ἐκ τῆς ὀπῆς (Ζ).

(*) Ἡ συσκευὴ αὕτη ἀποτελεῖ βελτίωσιν παρομοίας τῆς πρὸ ἐτῶν ὑπὸ τοῦ Καθηγητοῦ τῆς Πειραματικῆς Φυσικῆς Pohl προταθείσης διὰ τὸν αὐτὸν σκοπὸν διατάξεως.