ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΣ ΧΡΟΝΟΥ ΚΑΙ ΑΣΤΡΟΝΑΥΤΙΚΗ

Ὑπὸ **Α. Ν. ΚΟΝΤΑΡΑΤΟΥ, B. S., M. S., Ph. D., F.B.I.S., Ass. A.I.E.E.**

ΠΕΡΙΛΗΨΙΣ

Ἡ παροῦσα ἐργασία σκοπὸν ἔχει νὰ παρουσιάσῃ εἰς τὸν μὴ εἰδικὸν τὸ φαινόμενον τῆς σχετικότητος τοῦ χρόνου, ὡς ἔχει τοῦτο, καὶ νὰ ἀναζητήσῃ τὰς συνθήκας, ὑπὸ τὰς ὁποίας εἶναι πράγματι ἐργαστηριακῶς ἀποδεικτέον. Ὡσαύτως ἀποβλέπει εἰς τὴν διατύπωσιν σχέσεων μεταξὺ χρόνου γῆς ἀφ' ἑνὸς καὶ δορυφόρων ἢ κοσμικῶν πυραύλων ἀφ' ἑτέρου, ὥστε νὰ ἀναγνωρισθοῦν οὐσιαστικῶς καὶ ποσοτικῶς τὰ προβλήματα Σχετικότητος, τὰ ὁποῖα ἔχουν νὰ ἀντιμετωπίσουν οἱ μελλοντικοὶ κοσμοναῦται.

Ἡ σχετικότης τοῦ χρόνου δὲν ἀποτελεῖ, ὡς γνωστόν, διαπίστωσιν καινοφανῆ. Αἱ ἐπιτεύξεις ὅμως τῆς ἐπιστήμης εἰς τὸν διαπλανητικὸν τομέα ἐπαναφέρουν εἰς τὴν ἐπικαιρότητα τὸ ἐξαιρετικὰ ἐνδιαφέρον αὐτὸ φαινόμενον, προσδίδοντάς του μάλιστα καὶ συναρπαστικὰς δυνατότητας.

Ἀλλὰ εἰς τί ἀκριβῶς ἔγκειται ἡ ἰδιότης αὐτὴ τοῦ χρόνου; Ἡ θεωρία τῆς Σχετικότητος διδάσκει, ὅτι ὁ χρόνος ὡς φυσικὴ ὀντότης δὲν εἶναι ἀπόλυτος καὶ ὅτι μετρούμενος ὑπὸ παρατηρητῶν εὑρισκομένων ἐπὶ διαφόρων συστημάτων ἀναφορᾶς ἀποδεικνύεται ἐν γένει διαφορετικός, ἐξαρτώμενος ἐξ ὁλοκλήρου ἀπὸ τὴν σχετικὴν κινητικὴν κατάστασιν τῶν συστημάτων τούτων. Ἡ ἐκλαϊκευμένη πάντως ἀντίληψις, ὅτι παρατηρητὴς εὑρισκόμενος ἐπὶ κινουμένου συστήματος ἀναφορᾶς γηράσκει βραδύτερον ἀπὸ παρατηρητὴν ἐπὶ ἠρεμοῦντος συστήματος, εἶναι κατὰ βάσιν ἐσφαλμένη, καθ' ὅσον ἡ θεωρία τῆς Σχετικότητος ἀποδεικνύει συγχρόνως, ὅτι ἀπόλυτος κίνησις εἰς τὸν χῶρον δὲν ὑπάρχει, μὴ ἔχουσα ἀφ' ἑαυτῆς οὐδεμίαν φυσικὴν ἔννοιαν. Αὐτομάτως, λοιπόν, ἀπορρέει τὸ λογικὸν συμπέρασμα ὅτι, ἐφ' ὅσον ἡ ἔννοια τῆς κινήσεως εἶναι μόνον σχετική, δύο παρατηρηταὶ εὑρισκόμενοι ἐπὶ ἀντιστοίχων συστημάτων ἀναφορᾶς, κινουμένων σχετικῶς εἰς τὸν χῶρον, δύνανται κάλλιστα νὰ θεωροῦν ὁ καθ' εἷς ἐξ αὐτῶν τὸν ἕτερον πάντοτε ἐν κινήσει, ἑαυτὸν δὲ ἐν ἠρεμίᾳ. Εἰς τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν μάλιστα συστημάτων ἐν σχετικῇ ἠρεμίᾳ ἢ εὐθυγράμμῳ ἰσοταχεῖ κινήσει, μακρὰν δὲ καὶ πάσης ἐπιδράσεως πεδίων βαρύτητος, ἡ κατάστασις ἀδρανείας, ἤτοι ἡ ἀμοιβαία ἔλλειψις βαρύτητος, ἡ ὁποία γενικῶς χαρακτηρίζει αὐτοῦ τοῦ εἴδους τὰ συστήματα, τὰ καθιστᾷ ὡς πρὸς τὴν κίνησιν ἐντελῶς συμμετρικὰ μεταξύ των. Πᾶσα δὲ κινητικὴ συμμετρικότης μεταξὺ δύο συστημάτων ἔχει ὡς ἀποτέλεσμα ἀδυναμίαν ἀποδείξεως πραγματικῆς διαστολῆς τοῦ χρόνου διὰ τὸ ἓν ἢ ἕτερον ἐκ τῶν συστημάτων.

Ἔστωσαν πρὸς τούτοις δύο συστήματα ἀδρανείας S καὶ S' μετακινούμενα πρὸς ἄλληλα εἰς τὸν χῶρον μὲ σχετικὴν σταθερὰν ταχύτητα v παραλλήλως τῶν ἀξόνων των x καὶ x', οἱ ὁποῖοι μάλιστα καὶ συνταυτίζονται. Κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν $T=0$, λογιζομένην ἐπὶ ἀμφοτέρων τῶν συστημάτων S καὶ S', αἱ ἀρχαὶ τῶν συντεταγμένων των συμπίπτουν ἀντιστοίχως μεταξύ των. Ὁ χρόνος τότε t' ὁ μετρούμενος ὑπὸ ὡρολογίου εὑρισκομένου εἰς τὴν θέσιν x', y', z' τοῦ συστήματος S' ἀντιστοιχεῖ πρὸς χρόνον t μετρούμενον ἐπὶ τοῦ συστήματος S κατὰ τὴν ἐξίσωσιν χρόνου τοῦ Lorentz :

$$t = \frac{\left(\frac{v}{c^2}\right)x' + t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{1}$$

ἔνθα c ἡ ταχύτης τοῦ φωτὸς εἰς τὸ κενόν.

Κατὰ συνέπειαν χρονικὸν διάστημα $t_2'-t_1'$ ἐπὶ τοῦ συστήματος S' ἀντιστοιχεῖ πρὸς χρονικὸν διάστημα :

$$t_2 - t_1 = \frac{t_2'-t_1'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{2}$$

ἐπὶ τοῦ συστήματος S.

Προκύπτει δηλαδή, ὅτι ὁ ρυθμὸς χρόνου τοῦ συστήματος S' ἐμφανίζεται ηὐξημένος ὡς πρὸς τὸ σύστημα S κατὰ τὸν συντελεστὴν $1\Big/\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$.

Ἐὰν τώρα τὸ ἴδιον ὡρολόγιον τοποθετηθῇ εἰς τὴν θέσιν x, y, z τοῦ συστήματος S, τότε ἡ ἀντιστοιχία τοῦ χρόνου τοῦ συστήματος S, θεωρουμένου ἐκ τοῦ συστήματος S', θὰ δίδεται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως χρόνου τοῦ Lorentz :

$$t' = \frac{t-(v/c^2)x}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \tag{3}$$

Συνάγεται ὡς ἐκ τούτου καὶ πάλιν, ὅτι ἡ ἀντιστοιχία τῶν χρονικῶν διαστημάτων τοῦ συστήματος S ἐπὶ τοῦ συστήματος S' θὰ ἐκφράζεται ὑπὸ τῆς συμμετρικῆς τῆς (2) σχέσεως :

$$t_2' - t_1' = \frac{t_2-t_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{4}$$

Προκύπτει, ἑπομένως, ὅτι ὁ ρυθμὸς χρόνου ἑκάστου ἐκ τῶν ἀνωτέρω δύο συστημάτων ἀναφορᾶς, θεωρούμενος πάντοτε ἀπὸ τοῦ ἑτέρου τῶν συστημάτων, παρουσιάζει ἀμοιβαίως σχετικὴν διαστολήν. Οὕτω, δύο δίδυμοι παρατηρηταὶ εὑρισκόμενοι ἀντιστοίχως ἐπὶ τῶν συστημάτων S καὶ S' θεωροῦν πάντοτε ὁ καθεὶς ἐξ αὐτῶν τὸν ἕτερον βραδύτερον γηράσκοντα τοῦ ἰδίου, ἐνῷ δυνατότης ἀμοιβαίας μεταπηδήσεώς των εἰς ἑνιαῖον σύστημα ἀναφορᾶς δι' ἐξαϋλώσεως καὶ ὑλοποιήσεώς των θὰ ἀπεδείκνυεν, ὅτι οὐδεὶς ἐξ αὐτῶν εἶναι εἰς τὴν πραγματικότητα γηραιότερος τοῦ ἄλλου καὶ ὅτι ἀμφότεροι γηράσκουν μὲ τὸν αὐτὸν ἀκριβῶς ρυθμόν. Ἡ ἀδυναμία ὅμως μεταπηδήσεως εἰς ἑνιαῖον σύστημα ἀναφορᾶς ἄνευ ριζικῆς μεταβολῆς τῆς κινητικῆς των καταστάσεως—ἡ ὁποία, ὡς ἀποδεικνύεται κατωτέρω, θὰ ἐπέδρα ἐπὶ τοῦ μεταξύ των χρόνου — ὑποστηρίζει ἔννοιαν σχετικότητος τοῦ χρόνου καὶ καὶ διὰ τὴν περίπτωσιν ἀκόμη αὐτήν.

Ἔστωσαν πάλιν δύο συστήματα ἀναφορᾶς μακρὰν πάσης ἐπιδράσεως πεδίων βαρύτητος, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ μὲν κινούμενον εὐθυγράμμως καὶ ἰσοταχῶς, τὸ δὲ ὁμαλῶς ἐπιταχυνόμενον ὡς πρὸς τὸ πρῶτον. Παρατηρηταὶ ἐγκατεστημένοι ἀντιστοίχως ἐπὶ τῶν δύο τούτων συστημάτων καὶ μὲ δυνατότητα ἀμοιβαίας ἀνταλλαγῆς ἀπόψεων ἀδυνατοῦν καὶ πάλιν νὰ καθορίσουν πειραματικῶς τὴν κινητικήν των κατάστασιν. Συγκεκριμένα, ὁ ἐπὶ τοῦ ἰσοταχῶς καὶ εὐθυγράμμως κινουμένου συστήματος παρατηρητὴς διαπιστώνει μὲν τὴν ἔλλειψιν βαρύτητος, ἀδυνατεῖ ὅμως νὰ καθορίσῃ ἐὰν ἁπλῶς ἀδρανῇ εἰς τὸν χῶρον ἢ πίπτῃ ἐντὸς πεδίου βαρύτητος. Ὁμοίως καὶ ὁ δεύτερος παρατηρητής, ὁ ἐπὶ τοῦ ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένου συστήματος εὑρισκόμενος, διαπιστώνει μὲν ὡς ἐκ τῆς ἐπιταχύνσεως τὴν πλασματικὴν παρουσίαν πεδίου βαρύτητος, ἀδυνατεῖ ὅμως καὶ αὐτὸς νὰ καθορίσῃ ἐὰν ἠρεμῇ ἁπλῶς ἐντὸς πεδίου βαρύτητος ἢ ἐπιταχύνεται σταθερῶς εἰς τὸν χῶρον. Αὐτὴ μάλιστα ἡ ἀδυναμία διακρίσεως μεταξὺ τῶν δυνάμεων ἀδρανείας καὶ βαρύτητος ἐκφράζεται εἰς τὴν Γενικευμένην θεωρίαν τῆς Σχετικότητος ὡς τὸ Ἀξίωμα τῆς Ἰσοδυναμίας.

Παρ' ὅλην ὅμως τὴν σχετικότητα τῆς κινήσεώς των, τὴν φορὰν αὐτὴν ἡ βασικὴ διαφορὰ μεταξὺ ἀδρανείας καὶ βαρύτητος, ἡ ὁποία γενικῶς χαρακτηρίζει αὐτοῦ τοῦ εἴδους τὰ συστήματα, αἴρει κάθε κινητικὴν συμμετρικότητα μεταξύ των καὶ ὁ προσδιορισμὸς τῆς σχετικῆς διαστολῆς τοῦ χρόνου τοῦ ἑνὸς συστήματος ὡς πρὸς τὸ ἄλλο ἔγκειται εἰς τὴν διάκρισιν τῶν νόμων ποὺ ἀκολουθεῖ ἓν ἕκαστον τῶν ἀνωτέρω συστημάτων. Οὕτω, τὰ μὲν συστήματα ἀδρανείας ἀκολουθοῦν τοὺς νόμους τῆς Εἰδικῆς θεωρίας τῆς Σχετικότητος ἐν ἀντιδιαστολῇ πρὸς τὰ ὑπὸ βαρύτητος χαρακτηριζόμενα, τὰ ὁποῖα ἀκολουθοῦν τοὺς νόμους τῆς Γενικευμένης θεωρίας τῆς Σχετικότητος.

Ἔστωσαν τὰ συστήματα ἀδρανείας S καὶ S', τῶν ὁποίων οἱ ἄξονες καὶ ἡ ἀρχὴ τῶν συντεταγμένων των ἀμοιβαίως συμπίπτουν κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν $T=0$, λογιζομένην ἀντιστοίχως ἐπὶ ἀμφοτέρων τῶν συστημάτων. Τὴν στιγμὴν ἀκριβῶς αὐτὴν τὸ σύστημα S' ἐπιταχύνεται πρὸς τὸ ἕτερον διὰ νὰ ἐπιστρέψῃ καὶ πάλιν, πολὺ ἀργότερον, τῇ ἐπενεργείᾳ καταλλήλων ἐξωτερικῶν δυνάμεων παρὰ τὸ κινητικῶς ἀμετάβλητον σύστημα S καὶ νὰ ταυτισθῇ πρὸς αὐτό. Ἡ διάρκεια τῆς μεταξὺ τῶν δύο συστημάτων ἀπομακρύνσεως μετρουμένη ἐπὶ τοῦ συστήματος S εἶναι:

$$T=\int_0^t dt \tag{5}$$

Ὁ αὐτὸς δὲ χρόνος ἐπὶ τοῦ συστήματος S', θεωρούμενος ἐκ τοῦ συστήματος S, εἶναι ἀντιστοίχως:

$$T'=\int_0^{t'} dt'=\int_0^{t}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\,dt \tag{6}$$

Παρὰ τὸ γεγονὸς ὅτι ἡ ὁλοκλήρωσις τῆς παραστάσεως 6 ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν συνάρτησιν $u=f(t)$, εἶναι φανερὸν ὅτι ὁ χρόνος T' εἶναι πάντοτε μικρότερος τοῦ T.

Ἀποδεικνύεται γενικῶς, ὅτι ἡ ἐπιλογὴ τῶν καταλλήλων νόμων δι' ἓν ἕκαστον τῶν ἀνωτέρω συστημάτων ὁδηγεῖ εἰς τὴν διαπίστωσιν σχετικῆς διαστολῆς τοῦ χρόνου διὰ τὰ ὑπὸ συνθήκας βαρύτητος χαρακτηριζόμενα συστήματα. Κατὰ συνέπειαν, ἐπειδὴ διὰ τὰ συστήματα ἀδρανείας ἡ συνισταμένη τῶν ἐπ' αὐτῶν ἐφαρμοζομένων δυνάμεων εἶναι πάντοτε μηδενική, ἐνῷ διὰ τὰ ὑπὸ βαρύτητος χαρακτηριζόμενα συστήματα εἶναι πάντοτε διάφορος τοῦ μηδενός, προκύπτει τὸ συμπέρασμα, ὅτι τυχὸν ἐφαρμογὴ ἐξωτερικῆς δυνάμεως ἐπιφέρει μεταβολὴν εἰς τὸν ρυθμὸν χρόνου τοῦ συστήματος. Ἐπιπροσθέτως μάλιστα ἡ μεγίστη διαπιστουμένη σχετικὴ διαστολὴ τοῦ χρόνου μεταξὺ συστημάτων ἀναφορᾶς ὑπὸ διαφορετικὰς ἐντάσεις βαρύτητος ἢ διαφορετικὰς ἐπιταχύνσεις ἀντιστοιχεῖ πάντοτε πρὸς τὰς μεγαλυτέρας ἐντάσεις ἢ ὑψηλοτέρας ἐπιταχύνσεις.

Ἐκ παραλλήλου ὅμως δέον νὰ ληφθῇ ὑπ' ὄψιν, ὅτι τυχὸν διαπίστωσις διαφορᾶς χρόνου κατὰ τὸν ἐπανασυνταυτισμὸν δύο συστημάτων ἀναφορᾶς, ἀρχικῶς συγχρονισμένων, οὐδόλως ἀποτελεῖ ἀπόδειξιν ἀπολύτου κινήσεως τοῦ ἑνὸς συστήματος ὡς πρὸς τὸ ἕτερον. Ἁπλῶς καὶ μόνον ἀποδεικνύεται τὸ γεγονός, ὅτι ὑπάρχει σαφῶς μία βασικὴ κινητικὴ ἀσυμμετρία μεταξὺ συστημάτων.

Ἐφαρμογὴ καὶ ἀποσαφήνισις τῶν μέχρι τοῦδε συμπερασμάτων ἀκολουθεῖ μέσῳ τῶν ἀμέσως κατωτέρω ἐξεταζομένων παραδειγμάτων:

α) Ταξίδιον εἰς τὸ κοσμικὸν διάστημα ὑπὸ μὴ ἀδρανῆ πτῆσιν.

Ὡς συνθήκη πτήσεως λαμβάνεται ἡ ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν σταθερᾶς δυνάμεως F ἐπιτάχυνσις τοῦ διαστημοπλοίου ἐπὶ χρόνον $T/4$ μετρούμενον ὑπὸ παρατηρητοῦ ἐπὶ τῆς γῆς. Ἡ δύναμις αὐτὴ F ἀναστρέφεται ἐν συνεχείᾳ ἐπὶ χρόνον $\frac{T}{2}$, εἰς τὸ τέλος τοῦ ὁποίου ἀναστρέφεται τελικῶς καὶ πάλιν ἐπὶ τὸν ὑπόλοιπον χρόνον $\frac{T}{4}$. Ἐὰν ἡ δύναμις F θεωρηθῇ ἀρκετὰ μεγάλη, ὥστε ἡ ἐπίδρασις τοῦ πεδίου βαρύτητος τῆς γῆς ἐπὶ τῆς κινήσεως τοῦ διαστημοπλοίου νὰ καθίσταται ἀμελητέα καὶ ἐφ' ὅσον ἐπὶ πλέον τοῦτο κινεῖται μακρὰν τῆς ἐπιδράσεως ἄλλων πεδίων βαρύτητος, τότε τὸ τέλος τοῦ ὁλικοῦ χρόνου T θὰ εὕρῃ τὸ διαστημόπλοιον ἐπιστρέφον ἐπὶ τῆς γῆς μὲ μηδενικὴν ταχύτητα.

Ὑπὸ τὰς συνθήκας αὐτὰς ὁ ὁλικὸς χρόνος τοῦ ταξιδίου ὁ μετρηθεὶς ὑπὸ τῶν ἀστροναυτῶν κατὰ τὴν ἐπιστροφήν των ἀπὸ τὸ διάστημα θὰ εἶναι, συμφώνως πρὸς τὴν ἐξίσωσιν (6):

$$T'=4\int_0^{T/4}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\,dt \tag{7}$$

Κατὰ τὴν Μηχανικὴν τῆς Σχετικότητος, ἡ ταχύτης u ἑνὸς ἐπιταχυνομένου σώματος εἶναι:

$$u=\frac{at}{\sqrt{1+a^2t^2/c^2}} \tag{8}$$

ἔνθα a ἡ ἐπιτάχυνσις ἠρεμίας. Δι' ἀντικαταστάσεως συνεπῶς τῆς σχέσεως (8) εἰς τὴν (7) προκύπτει:

$$T'=4\int_0^{T/4}\frac{dt}{\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}}} \tag{9}$$

ἢ

$$T'=\frac{4c}{a}\,ln\left[\frac{aT}{4c}+\sqrt{1+\left(\frac{aT}{4c}\right)^2}\right] \tag{10}$$

Εἰς περίπτωσιν δὲ κατὰ τὴν ὁποίαν εἶναι $\left(\frac{aT}{4c}\right)<1$ ἡ ἀνωτέρω σχέσις (10) καταλήγει εἰς τήν:

$$T'\simeq\frac{4c}{a}\left[\frac{aT}{4c}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{aT}{4c}\right)^3\right]$$

ἢ τελικῶς

$$\varDelta T\simeq\frac{a^2T^3}{96c^2} \tag{11}$$

Ἡ σχέσις (11) προσδιορίζει τὴν σημειουμένην διαστολὴν τοῦ χρόνου. Οὕτω, σαφῶς ἀποδεικνύεται, ὅτι ὁ κατὰ τὸν ἀνωτέρω τρόπον ταξιδεύσας παρατηρητὴς ἐπιστρέφει νεώτερος διδύμου ἀδελφοῦ του κατὰ τὸ τετράγωνον τῆς ἐπιταχύνσεως, τὴν ὁποίαν ὑπέστη, καὶ τὸν κύβον τοῦ χρόνου γῆς, κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ ὁποίου ἐταξίδευεν.

Διὰ ὁλοκληρώσεως τῆς σχέσεως (8) καὶ ἐφ' ὅσον εἶναι $\left(\frac{aT}{4c}\right)<1$, προκύπτει:

$$X_{\max}=2\int_0^{T/4}u\,dt\simeq\frac{aT^2}{16} \tag{12}$$

ἤτοι ἡ μεγίστη δυνατὴ ἀπόστασις ἀπομακρύνσεως τοῦ διαστημοπλοίου ἐκ τοῦ σημείου ἐκτοξεύσεώς του ἐντὸς τοῦ γηΐνου χρόνου T.

Τέλος, δι' ἀπαλείψεως τῆς τιμῆς τῆς ἐπιταχύνσεως a μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων (11) καὶ (12) ἕπεται ἡ σχέσις:

$$\varDelta T\simeq\frac{8\,X_{\max}^2}{3c^2T} \tag{13}$$

ἡ ὁποία συναρτήσει τῆς διανυθείσης μεγίστης ἀποστάσεως X_{max} ἐντὸς τοῦ γηΐνου χρόνου T καθορίζει τὴν σημειουμένην διαστολὴν τοῦ χρόνου.

β) Δορυφόροι ὑπὸ ἀδρανῆ τροχιάν.

Ὡς ἐκ τῆς κινήσεώς του εἰς τεχνητὸς δορυφόρος δύναται νὰ θεωρηθῇ ὑπὸ παρατηρητοῦ εὑρισκομένου ἐπὶ σταθεροῦ σημείου τῆς γῆς ὡς περιστρεφόμενος σχετικῶς πρὸς αὐτὸν μὲ ταχύτητα v.

Ἡ ἀντίστοιχος διαφορὰ χρόνου ἡ προκύπτουσα λόγῳ τῆς σχετικότητος τῆς μεταξὺ των κινήσεως ὑπολογίζεται συμφώνως πρὸς τὴν εἰδικὴν θεωρίαν τῆς Σχετικότητος ἐκ τῆς σχέσεως (2):

$$T'_2 - T'_1 = (T_2 - T_1)\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

ἡ ὁποία διὰ $T_2 - T_1 = T$ καὶ $T'_2 - T'_1 = T'$ καταλήγει εἰς τὴν ἁπλουστευμένην μορφήν:

$$T' \simeq T\left(1-\frac{v^2}{2c^2}\right)$$

ἢ

$$\Delta T \simeq \frac{v^2}{2c^2}\,T \tag{14}$$

ἔνθα T καὶ T' ὁ χρόνος γῆς καὶ δορυφόρου ἀντιστοίχως.

Ἐπιπροσθέτως ὅμως ἡ Γενικευμένη θεωρία τῆς Σχετικότητος ἀποδεικνύει, ὅτι ἡ συχνότης τῆς ἀκτινοβολουμένης ἐνεργείας τῶν ἀτόμων ἐντὸς πεδίων βαρύτητος ὑφίσταται μετατόπισιν τοῦ φάσματος πρὸς τὸ ἐρυθρόν. Ἡ σχετικὴ αὐτὴ μετατόπισις μεταφράζεται ὡς διαφορὰ χρόνου μεταξὺ ἀντιστοίχων συστημάτων. Οὕτω, ἡ φαινομένη μᾶζα ἑνὸς φωτονίου ἀποδεικνύεται ἐκ τῶν ἐξισώσεων:

$$E = mc^2 = h\nu \tag{15}$$

ὅτι εἶναι ἴση πρός:

$$m = \frac{h\nu}{c^2} \tag{16}$$

ἔνθα ν ἡ συχνότης τῆς ἀκτινοβολουμένης ἐνεργείας καὶ h ἡ σταθερὰ τοῦ Planck.

Κατὰ συνέπειαν ἡ ἀποκτωμένη ἐνέργεια κατὰ τὴν κίνησιν ἑνὸς φωτονίου παραλλήλως πρὸς τὴν διεύθυνσιν πεδίου βαρύτητος ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν διαφορὰν μεταξὺ τῆς τελικῆς καὶ ἀρχικῆς ἐνεργειακῆς καταστάσεως αὐτοῦ. Ἤτοι:

$$\Delta E = h\nu - h\nu' = \gamma M m \int_R^{R+l} \frac{dr}{r^2} \tag{17}$$

ἔνθα M, R ἀντιστοίχως ἡ μᾶζα καὶ ἡ ἀκτὶς τῆς γῆς,
γ ἡ παγκόσμιος σταθερὰ ἕλξεως καὶ
m ἡ μᾶζα τοῦ φωτονίου εἰς τὸ σημεῖον ἐκπομπῆς.

Ἐπομένως:

$$h\nu - h\nu' = \gamma M \frac{h\nu'}{c^2}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+l}\right) \tag{18}$$

Ἀντικατάστασις εἰς τὴν ἀνωτέρω σχέσιν (18) τῶν συχνοτήτων ν καὶ ν' διὰ τῶν ἀντιστοίχων χρόνων γῆς καὶ δορυφόρου T καὶ T' δίδει:

$$\frac{1}{T} - \frac{1}{T'} = \gamma M \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+l}\right)\frac{1}{T'}$$

ἢ τελικῶς:

$$T - T' = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\gamma M}{R+l}-\frac{\gamma M}{R}\right)T \tag{19}$$

Οὕτω, ἡ συνολικὴ διαφορὰ εἰς τὸν ρυθμὸν χρόνου μεταξὺ δορυφόρου καὶ γῆς ὑπολογίζεται δι' ἀθροίσεως τῶν σχέσεων (14) καὶ (19) καὶ εἶναι:

$$\sum \Delta T = \frac{1}{c^2}\left[\frac{1}{2}v^2 + \frac{\gamma M}{R+l} - \frac{\gamma M}{R}\right]T \tag{20}$$

Ἡ σχέσις (20) ἰσχύει γενικῶς δι' ἐλλειπτικὰς τροχιὰς μὲ μίαν τῶν ἑστιῶν κατεχομένων ὑπὸ τῆς γῆς. Εἰς τὴν εἰδικὴν δὲ περίπτωσιν κυκλικῆς τροχιᾶς ἡ ταχύτης v τοῦ δορυφόρου πέριξ τῆς γῆς ἔχει τὴν τιμήν:

$$v^2 = \frac{\gamma M}{R+l}$$

καὶ ἡ σχέσις (20) καταλήγει εἰς τήν:

$$\sum \Delta T = \frac{\gamma M}{c^2}\left[\frac{3}{2(R+l)} - \frac{1}{R}\right] \tag{21}$$

Ἀνάλυσις τῶν ἐξισώσεων (14) καὶ (19) ἀποδεικνύει, ὅτι ἡ διαφορὰ χρόνων διὰ τὰς δύο αὐτὰς ἀνεξαρτήτους περιπτώσεις εἶναι γενικῶς ἀντίθετος, ὑπερισχυούσης εἰς τὴν ἐξίσωσιν (20) τῆς κατ' ἀπόλυτον τιμὴν μεγαλυτέρας. Εἰς τὴν περίπτωσιν ὅμως κυκλικῆς τροχιᾶς ἀποδεικνύεται ἐκ τῆς ἐξισώσεως (21), ὅτι διὰ $l > \frac{R}{2}$, ἤτοι διὰ τροχιὰν ἄνω τῶν 2000 μιλίων ὑπὲρ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς γῆς, ὁ ρυθμὸς διελεύσεως τοῦ χρόνου ἐπὶ τοῦ δορυφόρου εἶναι ἀργότερος ἀπὸ ὅ,τι διὰ παρατηρητὴν ἐγκατεστημένον ἐπὶ τῆς γῆς.

Διὰ $l < \frac{R}{2}$ ἰσχύει ἀκριβῶς τὸ ἀντίστροφον καὶ τέλος διὰ $l = \frac{R}{2}$ ὁ ρυθμὸς χρόνου δι' ἀμφότερα τὰ συστήματα εἶναι ὁ αὐτός.

Βεβαίως αἱ ἐξετασθεῖσαι μέχρι τοῦδε ἀνωτέρω δύο περιπτώσεις δὲν ἀποτελοῦν παρὰ ἐξιδανίκευσιν συνθηκῶν πτήσεως. Εἰς τὴν πρᾶξιν τὰ προβλήματα εἶναι πολὺ περισσότερον περίπλοκα, καθ' ὅσον πρέπει νὰ λαμβάνωνται ὑπ' ὄψιν ἐπιταχύνσεις κατὰ τὰ ἀρχικὰ καὶ τελικὰ στάδια, ἐπιδράσεις ἐξωγηΐνων πεδίων βαρύτητος, καταστάσεις ἀδρανείας κατὰ περιοχὰς λόγῳ ἐξοικονομήσεως καυσίμων καὶ πᾶσα ἄλλη κινητικὴ μεταβολὴ λόγῳ παρακολουθήσεως προκαθωρισμένης τροχιᾶς. Ὁ ὑπολογισμὸς πάντως τῆς σχετικῆς διαφορᾶς χρόνου καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν βασίζεται ὁμοίως ἐπὶ τῶν γενικῶν γραμμῶν ποὺ ἤδη ἐξετέθησαν, ἀφοῦ προηγηθῇ λεπτομερὴς ἀνάλυσις τῆς πτήσεως διὰ τὴν ἀναγνώρισιν ὅλων τῶν παραγόντων ποὺ ἐπιδροῦν σχετικῶς.

γ) Ἀερόστατα μεγάλου ὕψους εἰς κατάστασιν ἰσορροπίας.

Ἡ μεταβολὴ τῆς ἐντάσεως τῆς βαρύτητος κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς ἀκτῖνος τῆς γῆς ἐπιδρᾷ ἐπὶ τοῦ χρόνου ἀντιστοίχων συστημάτων, ἠρεμούντων μὲν σχετικῶς, ἀλλὰ εἰς διαφορετικὰ ὕψη εὑρισκομένων. Τὸ φαινόμενον εἶναι ἀκριβῶς ἀνάλογον τοῦ εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα ἐξετασθέντος καὶ δὲν χρήζει περισσοτέρων διευκρινήσεων. Οὕτω, ἡ διαφορὰ χρόνου μεταξὺ παρατηρητῶν εὑρισκομένων ἐπὶ διαφορετικῶν ὑψομέτρων ἀπὸ τῆς ἐπιφανείας τῆς γῆς δίδεται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως (19):

$$T - T' = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\gamma M}{R+l} - \frac{\gamma M}{R}\right)T$$

ἔνθα T καὶ T' ἀντιστοίχως ὁ χρόνος τοῦ εἰς χαμηλότερον καὶ ὑψηλότερον σημεῖον παρατηρητοῦ. Ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ ἀποδεικνύει, ὅτι ὁ ἐπὶ τοῦ ὑψηλοτέρου σημείου εὑρισκόμενος παρατηρητὴς γηράσκει πάντοτε γρηγορώτερον τοῦ ἄλλου.

* * *

Τὰ ἀνωτέρω ἀποτελέσματα δὲν ἔχουν βεβαίως διαπιστωθῆ ἐργαστηριακῶς, τοὐλάχιστον πρὸς τὸ παρόν.

Ἤδη ὅμως ἡ ἐπίδρασις τῶν πεδίων βαρύτητος ἐπὶ τῶν φωτονίων ἀποτελεῖ ἐπιστημονικὸν γεγονὸς καὶ σχετικότης χρόνου ἔχει παρατηρηθῆ κατὰ τὰς μετρήσεις ἐπὶ τῶν π μεσονίων. Οὕτω, ἓν π μεσόνιον διασπᾶται εἰς ἓν μ μεσόνιον καὶ ἓν νουτρῖνον ἐντὸς χρόνου ἡμισείας ζωῆς $2{,}55 \times 10^{-8}$ sec, ἐφ' ὅσον ἡ μέτρησις γίνεται ὑπὸ συστήματος εἰς σχετικὴν κινητικὴν ἠρεμίαν μετ' αὐτοῦ. Ἄλλως, ἐὰν τὸ π μεσόνιον κινῆται μὲ ταχύτητα 0,99 τῆς ταχύτητος τοῦ φωτὸς ὡς πρὸς τὸ σύστημα μετρήσεως, τότε ἡ ἡμίσεια ζωή του ἀποδεικνύεται ἴση πρὸς 18×10^{-8} sec, ἤτοι κατὰ 7 περίπου φορὰς μεγαλυτέρα τῆς προηγουμένης.

Δὲν εἶναι πάντως μακρὰν ὁ χρόνος, κατὰ τὸν ὁποῖον τὰ συμπεράσματα τῆς θεωρίας τῆς Σχετικότητος θὰ ἀποτελοῦν καθημερινὴν πραγματικότητα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1) Theoretical Physics, G. Joos. Blackie and Son Limited, 1947.

2) Introduction to the theory of Relativity, P. G. Bergmann, Prentice — Hall Inc., 1953.

3) Space Technology, Howard S. Seifert. Editor John Wiley and Sons Inc., 1959.

4) Introduction to Theoretical Physics, L. Page, Van Nostrand Co, 1947.

5) Space Flight, C Adams, McGraw - Hill, 1958.

6) The Universe and Dr. Einstein, L. Barnett, Mentor Book Co., 1957.

TIME DILATION AND ASTRONAUTICS

By Dr. A. N. KONTARATOS, B. S, M. S., Ph D, Ass, AIEE, F.B.I.S.

SUMMARY

The present article contains a simple analysis of the time dilation phenomena to be encountered in future astronautics. The use of basic principles of Relativistic Mechanics establishes quantitatively the existence of a definite time difference for three distinct cases. Namely :

a) For a two way mission under powered flight.

b) For inertial orbiting around the earth, and

c) For a static effect in an inverse square gravity field.