Ἐφαρμογὴ τῶν ἐξισώσεων ταχυτήτων εἰς τὸ πρόβλημα τοῦ λυγισμοῦ κυκλικοῦ κυλινδρικοῦ κελύφους.

Τοῦ **Ι. Θ. Κατσικαδέλη**, M. Sc,, Δρος Μηχ., Ἐπιμελητοῦ Ε.Μ.Π.

Περίληψις

Εἰς τὴν παροῦσαν ἐργασίαν ἀναπτύσσεται μία μεθοδολογία ἐφαρμογῆς τῶν ἐξισώσεων ταχυτήτων (Rate equations) διὰ τὴν ἐπίλυσιν προβλημάτων ἐλαστικῆς εὐσταθείας κελυφῶν. Εἰδικῶς ἡ μέθοδος ἐφαρμόζεται διὰ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ κρισίμου φορτίου λυγισμοῦ κυκλικοῦ κυλινδρικοῦ κελύφους ὑπὸ ὁμοιόμορφον ἐξωτερικὴν φόρτισιν. Αἱ ἐξισώσεις ταχυτήτων ἐξάγονται ἐκ τῶν γενικῶν ἐξισώσεων ἰσορροπίας τοῦ κυκλικοῦ κυλινδρικοῦ κελύφους ἰσχυουσῶν διὰ τὴν παραμορφωμένην κατάστασιν. Τῇ βοηθείᾳ τῶν γενικευμένων παραμέτρων τῆς παραμορφώσεως αἱ ἐξισώσεις ταχυτήτων μετασχηματίζονται εἰς σύστημα ὁμογενῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων μὲ περιοδικὰς συνοριακὰς συνθήκας. Ἐξετάζονται δύο περιπτώσεις φορτίσεως: α) Τὸ ὁμοιόμορφον ἐξωτερικὸν φορτίον παραμένει κάθετον ἐπὶ τὴν παραμορφωμένην μέσην ἐπιφάνειαν, β) τὸ ὁμοιόμορφον ἐξωτερικὸν φορτίον διατηρεῖ τὴν ἀρχικήν του κατεύθυνσιν. Δι' ἑκάστην περίπτωσιν φορτίσεως προκύπτει ἓν πρόβλημα ἰδιοτιμῶν, τὸ ὁποῖον ἐπιλύεται δι' ἀναζητήσεως λύσεως ὑπὸ μορφὴν σειρῶν Fourier. Ἐκ τῶν ἰδιοτιμῶν δὲ τῶν ἀντιστοίχων προβλημάτων καθορίζονται τὰ κρίσιμα φορτία λυγισμοῦ.*

1. Εἰσαγωγή

Τὸ πρόβλημα τοῦ λυγισμοῦ κυκλικοῦ κυλινδρικοῦ κελύφους ὑπὸ ὁμοιόμορφον ἐξωτερικὴν φόρτισιν ἔχει ἀποτελέσει ἀντικείμενον ἐκτεταμένης ἐρεύνης[1, 4]. Μεταξὺ τῶν κυριωτέρων συμπερασμάτων τῆς ἐρεύνης ταύτης εἶναι ὅτι τὸ κρίσιμον φορτίον λυγισμοῦ ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς διευθύνσεως τοῦ φορτίου κατὰ τὸ στάδιον τοῦ λυγισμοῦ. Εἰς τὴν θεωρίαν τῆς ἐλαστικῆς εὐσταθείας τῶν κατασκευῶν ἔχουν ἀναπτυχθῆ ἀρκετὰ κριτήρια, ἐκ τῶν ὁποίων εἶναι δυνατὸν νὰ προκύψῃ τὸ κρίσιμον φορτίον λυγισμοῦ [1,4,5,6]. Σκοπὸς τῆς παρούσης ἐργασίας εἶναι ἡ ἀνάπτυξις μεθοδολογίας, διὰ τῆς ὁποίας δεικνύεται ἡ δυνατότης ἐφαρμογῆς τῶν ἐξισώσεων ταχυτήτων, αἱ ὁποῖαι ἔχουν ἤδη ἐφαρμοσθῆ ἐπιτυχῶς διὰ τὴν ἐπίλυσιν μὴ γραμμικῶν προβλημάτων[2], καὶ εἰς προβλήματα εὐσταθείας κελυφῶν. Ἡ προτεινομένη μέθοδος ἐφαρμόζεται διὰ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ φορτίου λυγισμοῦ κυκλικοῦ κυλινδρικοῦ κελύφους φορτιζομένου ὑπό:

α) Ὁμοιομόρφου φορτίου καθέτου πρὸς τὴν μέσην ἐπιφάνειαν τοῦ κελύφους, τὸ ὁποῖον ἐξακολουθεῖ νὰ παραμένῃ κάθετον πρὸς αὐτὴν κατὰ τὸ στάδιον τοῦ λυγισμοῦ (π. χ. ὑδροστατικὴ πίεσις).

β) Ὁμοιομόρφου φορτίου καθέτου πρὸς τὴν μέσην ἐπιφάνειαν τοῦ κελύφους, τὸ ὁποῖον διατηρεῖ τὴν ἀρχικήν του κατεύθυνσιν κατὰ τὸ στάδιον τοῦ λυγισμοῦ.

Ὡς προκύπτει ἐκ τῶν δύο ἐφαρμογῶν τῆς παρούσης ἐργασίας ἡ ἀναπτυσσομένη μέθοδος εἶναι ἄμεσος καὶ συστηματική.

Εἰδικῶς διὰ τὴν περίπτωσιν κελύφους ἐκ περιστροφῆς ὑπὸ ἀξονομετρικὴν φόρτισιν αἱ ἐξισώσεις ταχυτήτων ἔχουν διατυπωθῆ ὑπὸ τοῦ Batterman[3]. Αἱ ἐξισώσεις ὅμως αὐται προϋποθέτουν ἀξονοσυμμετρικὴν παραμόρφωσιν τοῦ κελύφους καὶ ὡς ἐκ τούτου δὲν προσφέρονται διὰ τὰς ἐξεταζομένας περιπτώσεις, εἰς τὰς ὁποίας ἡ παραμόρφωσις παύει νὰ εἶναι ἀξονοσυμμετρικὴ κατὰ τὸ στάδιον τοῦ λυγισμοῦ. Εἰς τὴν παροῦσαν ἐργασίαν αἱ ἐξισώσεις ταχυτήτων παράγονται ἀπ' εὐθείας ἐκ τῶν γενικῶν ἐξισώσεων τοῦ κυκλικοῦ κυλινδρικοῦ κελύφους[5]. Εἰσάγονται ἀκολούθως αἱ γενικευμέναι συνιστῶσαι τῆς παραμορφώσεως συναρτήσει τῶν συνιστωσῶν τῆς ταχύτητος, αἱ ὁποῖαι εἰς τὴν προκειμένην περίπτωσιν εἶναι μόνον δύο, ἡ κάθετος πρὸς τὴν μέσην ἐπιφάνειαν V_n καὶ ἡ ἐφαπτομενικὴ τῆς κυκλικῆς διατομῆς V_s. Μετὰ τὴν ἔκφρασιν καὶ τῶν ἐντατικῶν μεγεθῶν συναρτήσει τῶν συνιστωσῶν τῆς ταχύτητος αἱ ἐξισώσεις ταχυτήτων μετασχηματίζονται εἰς ἓν ὁμογενὲς σύστημα γραμμικῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων ὡς πρὸς τὰς V_n καὶ V_s μὲ περιοδικὰς συνοριακὰς συνθήκας. Ἡ συνθήκη, κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ σύστημα ἔχει λύσιν διάφορον τῆς μηδενικῆς, ἀποτελεῖ τὸ κριτήριον λυγισμοῦ. Ἐκ τῆς συνθήκης ταύτης προκύπτει τὸ κρίσιμον φορτίον λυγισμοῦ, τὸ ὁποῖον ταυτίζεται μὲ τὸ γνωστὸν ἐξ ἄλλων μεθόδων φορτίον λυγισμοῦ[1,4].

2. Ἐξισώσεις ἰσορροπίας κυλινδρικοῦ κελύφους

Αἱ γενικαὶ ἐξισώσεις ἰσορροπίας κυκλικοῦ κυλινδρικοῦ κελύφους αἱ περιλαμβάνουσαι ἅπαντα τὰ ἐντατικὰ μεγέθη εἶναι:[5]

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{a}\frac{\partial N_{\varphi x}}{\partial \varphi} = -p_x \tag{1a}$$

$$\frac{1}{a}\frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial N_{x\varphi}}{\partial x} - \frac{1}{a} Q_\varphi = -p_\varphi \tag{1b}$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{1}{a}\frac{\partial Q_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{a} N_\phi = p_n \tag{1c}$$

$$\frac{\partial M_{x\varphi}}{\partial x} - \frac{1}{a}\frac{\partial M_\varphi}{\partial \varphi} + Q_\varphi = 0 \tag{1d}$$

$$\frac{1}{a}\frac{\partial M_{\varphi x}}{\partial \varphi} + \frac{\partial M_x}{\partial_x} - Q_x = 0 \tag{1e}$$

$$\frac{1}{a} M_{\varphi x} + N_{x\varphi} - N_{\varphi x} = 0 \tag{1f}$$

Ἔνθα:

a: ἡ ἀκτὶς τῆς μέσης ἐπιφανείας τοῦ κυλινδρικοῦ κελύφους.

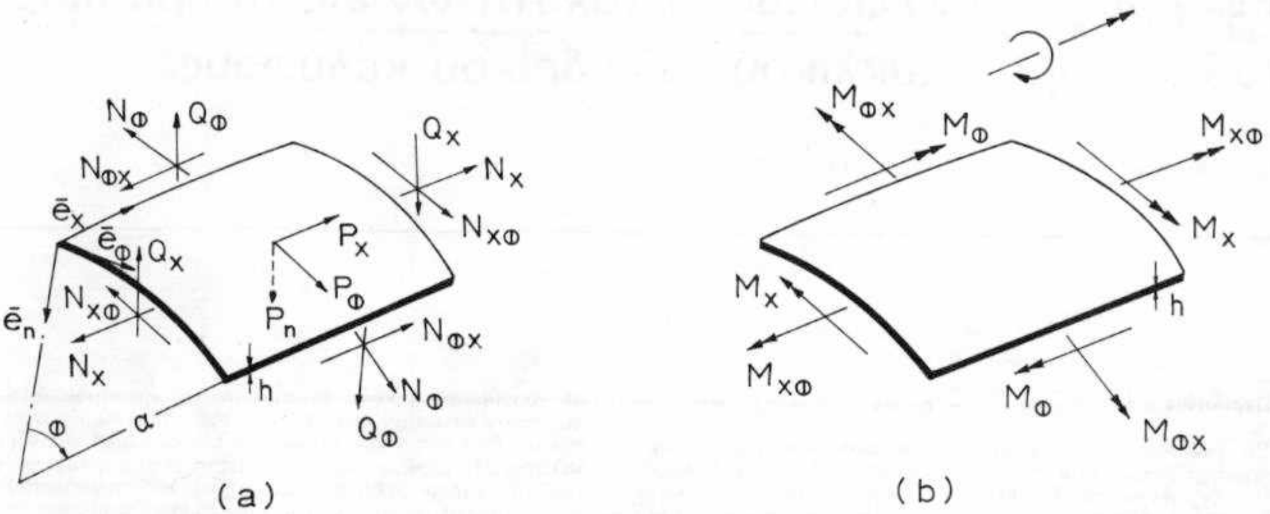
x, φ: κυλινδρικαὶ συντεταγμέναι.

N_x, N_φ, $N_{x\varphi}$, $N_{\varphi x}$, M_x, M_φ, $M_{x\varphi}$, $M_{\varphi x}$, Q_x, Q_φ: τὰ ἀνὰ μονάδα μήκους ἐντατικὰ μεγέθη ἐπὶ διατομῶν καθέτων πρὸς τοὺς ἄξονας τῶν συντεταγμένων, ὡς εἰς τὰ Σχ. 1a, b ἐμφαίνεται.

p_x, p_φ, p_n: αἱ ἀνὰ μονάδα μέσης ἐπιφανείας συνιστῶσαι τῆς ἐξωτερικῆς φορτίσεως κατὰ τὰς διευθύνσεις τῶν μοναδιαίων διανυσμάτων $\bar{e}_x$, $\bar{e}_\varphi$, $\bar{e}_n$ (Σχ. 1a).

Θεωροῦμεν τὴν περίπτωσιν, κατὰ τὴν ὁποίαν αἱ ἀκραῖαι διατομαὶ τοῦ κυλινδρικοῦ κελύφους εἶναι ἐλεύθεραι. Τότε δι' ὁμοιόμορφον ἐξωτερικὴν φόρτισιν, ἡ ἔντασις καὶ ἡ παρα-

(*) Διὰ τοῦ ὅρου ταχύτης δὲν νοεῖται μόνον ἡ παράγωγος τοῦ διαστήματος ὡς πρὸς τὸν χρόνον, ἀλλὰ καὶ ἡ παράγωγος οἱουδήποτε φυσικοῦ μεγέθους ὡς πρὸς τὸν χρόνον.



Σχ. 1

μόρφωσις κατὰ τὸ στάδιον τοῦ λυγισμοῦ εἶναι ἀνεξάρτητα τοῦ x. Δηλαδὴ ὁ λυγισμὸς πραγματοποιεῖται διὰ παραμορφώσεως τῆς κυκλικῆς διατομῆς τοῦ κελύφους ὁμοιομόρφως κατὰ μῆκος τῶν γενετειρῶν αὐτοῦ. Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν, κατὰ τὴν ὁποίαν αἱ ἀκραῖαι διατομαὶ ὑπόκεινται μὲν εἰς τυχούσας συνθήκας στηρίξεως (γεωμετρικὰς δεσμεύσεις), ἀλλὰ τὸ μῆκος τοῦ κελύφους εἶναι πολὺ μεγάλο ὥστε ἡ ἐπιρροὴ τῶν δεσμεύσεων τούτων νὰ εἶναι ἀμελητέα[1]. Ἐπὶ πλέον, ὡς γνωστόν, αἱ ἐξισώσεις (1) ἰσχύουν καὶ διὰ τὸ παραμορφωμένον στοιχεῖον τοῦ κελύφους, ἐὰν βεβαίως ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος a θεωρηθῇ μεταβλητή. Τοῦτο σημαίνει, ὅτι, διὰ τὴν περίπτωσιν ὁμοιομόρφου ἐξωτερικῆς πιέσεως, ἡ ὁποία πρὸ τῆς ἐνάρξεως τοῦ λυγισμοῦ θὰ ἔχῃ συνιστώσας $(0, 0, p_n = p)$, κατὰ τὸν λυγισμὸν εἶναι δυνατὸν νὰ ἔχῃ συνιστώσας $(0, P_\varphi, P_n)$, ἤτοι ἡ p_φ νὰ εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός.

Ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ἀνωτέρω παρατηρήσεων αἱ ἐξισώσεις (1) ἁπλοποιοῦνται περιοριζόμεναι εἰς τὰς ἀκολούθους τρεῖς:

$$\frac{1}{a}\frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{1}{a} Q_\varphi = -p_\varphi \tag{2a}$$

$$\frac{1}{a}\frac{\partial Q_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{a} N_\varphi = -p_n \tag{2b}$$

$$\frac{1}{a}\frac{\partial M_\varphi}{\partial \varphi} - Q_\varphi = 0 \tag{2c}$$

Ἐὰν εἰς τὰς ἀνωτέρω ἐξισώσεις εἰσαγάγωμεν ὡς νέαν ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν τὸ μῆκος τοῦ τόξου s (βλ. Σχ. 2) ὁπότε

$$\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial s}, \quad \frac{1}{a} = \frac{\partial \varphi}{\partial s}$$

αἱ ἐξισώσεις (2) λαμβάνουν τὴν μορφήν:

$$\frac{\partial N_\varphi}{\partial s} - Q_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial s} + p_s = 0 \tag{3a}$$

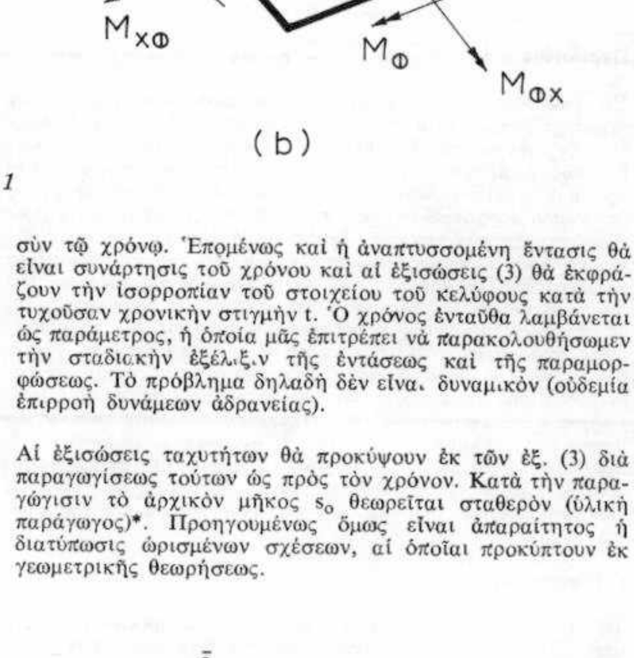
$$\frac{\partial Q_\varphi}{\partial s} + N_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial s} + p_n = 0 \tag{3b}$$

$$\frac{\partial M_\varphi}{\partial s} - Q_\varphi = 0 \tag{3c}$$

3. Αἱ ἐξισώσεις ταχυτήτων

Θεωροῦμεν ὅτι ἐξωτερικὴ φόρτισις τοῦ κελύφους αὐξάνει σὺν τῷ χρόνῳ. Ἑπομένως καὶ ἡ ἀναπτυσσομένη ἔντασις θὰ εἶναι συνάρτησις τοῦ χρόνου καὶ αἱ ἐξισώσεις (3) θὰ ἐκφράζουν τὴν ἰσορροπίαν τοῦ στοιχείου τοῦ κελύφους κατὰ τὴν τυχοῦσαν χρονικὴν στιγμὴν t. Ὁ χρόνος ἐνταῦθα λαμβάνεται ὡς παράμετρος, ἡ ὁποία μᾶς ἐπιτρέπει νὰ παρακολουθήσωμεν τὴν σταδιακὴν ἐξέλιξιν τῆς ἐντάσεως καὶ τῆς παραμορφώσεως. Τὸ πρόβλημα δηλαδὴ δὲν εἶναι δυναμικὸν (οὐδεμία ἐπιρροὴ δυνάμεων ἀδρανείας).

Αἱ ἐξισώσεις ταχυτήτων θὰ προκύψουν ἐκ τῶν ἐξ. (3) διὰ παραγωγίσεως τούτων ὡς πρὸς τὸν χρόνον. Κατὰ τὴν παραγώγισιν τὸ ἀρχικὸν μῆκος s_o θεωρεῖται σταθερὸν (ὑλικὴ παράγωγος)*. Προηγουμένως ὅμως εἶναι ἀπαραίτητος ἡ διατύπωσις ὡρισμένων σχέσεων, αἱ ὁποῖαι προκύπτουν ἐκ γεωμετρικῆς θεωρήσεως.



Σχ. 2

Ἐπειδὴ αἱ ἑπόμεναι σχέσεις ἰσχύουν διὰ τυχοῦσαν μορφὴν διατομῆς, εἰς τὸ Σχ. 2 ἡ ἀρχικὴ θέσις παριστᾷ τυχὸν τόξον μεταβλητῆς ἀκτῖνος καμπυλότητος. Τὸ στοιχεῖον ds μὲ τὸ ds_o συνδέονται διὰ τῆς σχέσεως[3]

$$ds = g\, ds_o \tag{4}$$

ἔνθα:

$$g = \left[\left(\sin\varphi_o - \frac{\partial w}{\partial s_o}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial s_o} + \cos\varphi_o\right)^2 \right]^{1/2} \tag{5}$$

(*) Ἡ ὑλικὴ παράγωγος (material derivative) ὡς πρὸς τὸν χρόνον μιᾶς συναρτήσεως $F(s,t)$, ὅπου $s = f(s_o,t)$ ὁρίζεται ὡς ἑξῆς:

$$\frac{D}{Dt} F(s,t) = \frac{\partial}{\partial t} F[f(s_0,t)t] = \frac{\partial}{\partial t} F(s,t) \Big|_{s_0 = \text{σταθερόν}}$$

Ἡ ὑλικὴ παράγωγος ἀναφέρεται εἰς τὴν ἑλληνικὴν βιβλιογραφίαν ὡς οὐσιαστική[7].

Διὰ τὴν ταχύτητα $\bar{V}$ τοῦ σημείου A θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις:

$$\bar{V} = V_s\bar{e}_s + V_n\bar{e}_n = \frac{\partial v}{\partial t}\,\bar{i} + \frac{\partial w}{\partial t}\,\bar{K} \qquad (6)$$

Ἐκ περαιτέρω γεωμετρικῆς θεωρήσεως καὶ εἰσαγωγῆς τῶν γενικευμένων ταχυτήτων παραμορφώσεων προκύπτουν αἱ ἑπόμεναι σχέσεις[3]

$$\dot{e}_\varphi = \frac{\dot{g}}{g} = \frac{\partial V_s}{\partial s} - \frac{\partial \varphi}{\partial s} V_n \qquad (6a)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial V_n}{\partial s} + V_s \frac{\partial \varphi}{\partial s} \qquad (6b)$$

$$\dot{\kappa}_\varphi = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial V_n}{\partial s} + \frac{\partial \varphi}{\partial s} V_s\right) \qquad (6c)$$

ἔνθα e_φ, κ_φ: ἡ ἀνηγμένη ἐπιμήκυνσις καὶ καμπυλότης ἀντιστοίχως τῆς μέσης ἐπιφανείας εἰς τὴν παραμορφωμένην κατάστασιν. Διὰ τῆς τελείας δηλοῦται ἡ μερικὴ παράγωγος ὡς πρὸς τὸν χρόνον $\frac{\partial}{\partial t}$.

Διὰ τὴν παράγωγον ὡς πρὸς s θὰ ἰσχύῃ:

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s_o}\frac{\partial s_o}{\partial s} = \frac{1}{g}\frac{\partial}{\partial s_o} \qquad (7)$$

Ἐπομένως:

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial}{\partial s}\right) &= \frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{g}\frac{\partial}{\partial s_o}\right) \\ &= \frac{1}{g}\frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial}{\partial s_o}\right) + \frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{g}\right)\frac{\partial}{\partial s_o} \\ &= \frac{1}{g}\frac{\partial}{\partial s_o}(\;)^{\cdot} - \frac{\dot{g}}{g^2}\frac{\partial}{\partial s} \qquad (8) \\ &= \frac{\partial}{\partial s}(\;)^{\cdot} - \frac{\dot{g}}{g}\frac{\partial}{\partial s} \\ &= \frac{\partial}{\partial s}(\;)^{\cdot} - \dot{e}_\varphi \frac{\partial}{\partial s} \end{aligned}$$

Αἱ ἐξισώσεις ταχυτήτων τῶν ἐντατικῶν μεγεθῶν λαμβάνονται διὰ παραγωγίσεως τῶν ἐξ. (3) ὡς πρὸς τὸν χρόνον. Κατὰ τὴν παραγώγισιν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν ὅτι s_o = σταθερόν. Οὕτω ἐκ τῆς (3a) προκύπτει:

$$\frac{\partial \dot{N}_\varphi}{\partial s} - \dot{e}_\varphi \frac{\partial N_\varphi}{\partial s} - \dot{Q}_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial s} - Q_\varphi\left(\frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial s} - \dot{e}_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial s}\right) + \dot{p}_s = 0$$

ἢ

$$\frac{\partial \dot{N}_\varphi}{\partial s} - Q_\varphi \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial s} - \dot{Q}_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial s} - \dot{e}_\varphi\left(\frac{\partial N_\varphi}{\partial s} - Q_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial s}\right) + \dot{p}_s = 0$$

ἢ δυνάμει τῆς (3a)

$$\frac{\partial \dot{N}_\varphi}{\partial s} - Q_\varphi \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial s} - \dot{Q}_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial s} + \dot{e}_\varphi p_s + \dot{p}_s = 0 \qquad (9)$$

Κατ' ἀνάλογον τρόπον διὰ παραγωγίσεως τῶν (3b) καὶ (3c) λαμβάνομεν:

$$\frac{\partial \dot{Q}_\varphi}{\partial s} + N_\varphi \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial s} + \dot{N}_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial s} + \dot{e}_\varphi p_n + \dot{p}_n = 0 \qquad (10)$$

$$\frac{\partial \dot{M}_\varphi}{\partial s} - \dot{Q}_\varphi - \dot{e} Q_\varphi = 0 \qquad (11)$$

Αἱ ταχύτητες τῶν ἐντατικῶν μεγεθῶν δίδονται συναρτήσει τῶν ταχυτήτων τῶν μεγεθῶν παραμορφώσεως ὑπὸ τῶν σχέσεων[3]

$$\dot{N}_\varphi = D\,\dot{e}_\varphi \qquad (12a)$$

$$\dot{M}_\varphi = -K\,\dot{\kappa}_\varphi \qquad (12b)$$

ἔνθα:

$$D = \frac{Eh}{1-\nu^2}, \quad K = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \qquad (12c)$$

(h = τὸ πάχος τοῦ κελύφους, ν = ὁ συντελεστὴς Poisson)

Τέλος τῇ βοηθείᾳ τῶν σχέσεων (6a) καὶ (6c) λαμβάνομεν:

$$\begin{aligned} \dot{N}_\varphi &= D\,\dot{e}_\varphi = D\left(\frac{\partial V_s}{\partial s} - \frac{\partial \varphi}{\partial s} V_n\right) \\ \dot{M}_\varphi &= -K\,\dot{\kappa}_\varphi = -K\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial V_n}{\partial s} + \frac{\partial \varphi}{\partial s} V_s\right) \end{aligned} \qquad (13)$$

4. Λυγισμὸς τοῦ κυλινδρικοῦ κελύφους διὰ τὴν φόρτισιν τῆς περιπτώσεως (a)

Ἐφ' ὅσον τὸ κέλυφος εὑρίσκεται εἰς προλυγιστικὴν κατάστασιν, ἡ ἔντασις καὶ παραμόρφωσίς του θὰ εἶναι ἀξονοσυμμετρικαί. Ὁ λυγισμὸς θὰ ἐπέλθῃ κατὰ τὴν στιγμὴν ὅπου ἡ παραμόρφωσις μεταπίπτει εἰς μὴ ἀξονοσυμμετρικήν, δηλαδὴ γίνεται συνάρτησις τῆς μεταβλητῆς s, ἢ ὅπερ τὸ αὐτὸ αἱ ταχύτητες $V_n(s)$, $V_s(s)$ τῶν σημείων τῆς μέσης ἐπιφανείας εἶναι διάφοροι τοῦ μηδενός.

Κατόπιν τούτου δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ὡς ἀρχικὴν ἐντατικὴν κατάστασιν τὴν μεμβρανικήν, ἤτοι[5]

$$Q_\varphi = O, \quad M_\varphi = O, \quad N_\varphi = -pa, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{1}{a} \qquad (14)$$

Εἰς τὴν παροῦσαν περίπτωσιν ἡ ὁμοιόμορφος ἐξωτερικὴ φόρτισις διατηρεῖται κάθετος ἐπὶ τὴν παραμορφωμένην μέσην ἐπιφάνειαν τοῦ κελύφους (π. χ. ὑδροστατικὴ πίεσις), ἑπομένως θὰ ἰσχύῃ:

$$p_n = p, \quad p_s = 0, \quad \dot{p}_s = \dot{p}_n = 0 \qquad (15)$$

Δι' ἀντικαταστάσεως τῶν (14) καὶ (15) εἰς τὰς (9), (10) καὶ (11) λαμβάνομεν:

$$\frac{\partial \dot{N}_\varphi}{\partial s} - \frac{1}{a}\dot{Q}_\varphi = 0 \qquad (16a)$$

$$\frac{\partial \dot{Q}_\varphi}{\partial s} + \frac{1}{a}\dot{N}_\varphi - pa\frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial s} + \dot{e}_\varphi p = 0 \qquad (16b)$$

$$\frac{\partial \dot{M}_\varphi}{\partial s} - \dot{Q}_\varphi = 0 \qquad (16c)$$

Κατόπιν ἀπαλοιφῆς τῆς $\dot{Q}_\varphi$ προκύπτει:

$$\frac{\partial \dot{N}_\varphi}{\partial s} - \frac{1}{a}\frac{\partial \dot{M}_\varphi}{\partial s} = 0 \qquad (17a)$$

$$\frac{\partial^2 \dot{M}_\varphi}{\partial s^2} + \frac{1}{a}\dot{N}_\varphi - pa\frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial s} + \dot{e}_\varphi p = 0 \qquad (17b)$$

Διὰ περαιτέρω ἀντικαταστάσεως τῶν σχέσεων (6a) καὶ (13) εἰς τὰς ἀνωτέρω σχέσεις λαμβάνομεν:

$$D\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial V_s}{\partial s} - \frac{V_n}{a}\right) + \frac{1}{a}K\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial^2 V_n}{\partial s^2} + \frac{1}{a}\frac{\partial V_s}{\partial s}\right) = 0 \qquad (18a)$$

$$\begin{aligned} -K\frac{\partial^2}{\partial s^2}\left(\frac{\partial V_n}{\partial s^2} + \frac{1}{a}\frac{\partial V_s}{\partial s}\right) + \frac{1}{a}D\left(\frac{\partial V_s}{\partial s} - \frac{V_n}{a}\right) - \\ - pa\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial V_n}{\partial s} + \frac{V_s}{a}\right) + p\left(\frac{\partial V_s}{\partial s} - \frac{V_n}{a}\right) = 0 \end{aligned} \qquad (18b)$$

ἢ μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν παραγωγίσεων:

$$(D+\frac{K}{a^2})\frac{\partial^2}{\partial s^2}V_s+(\frac{K}{a}\frac{\partial^3}{\partial s^3}-\frac{D}{a}\frac{\partial}{\partial s})V_n=0 \qquad (19a)$$

$$(-\frac{1}{a}\frac{\partial^3}{\partial s^3}+\frac{D}{aK}\frac{\partial}{\partial s})V_s+$$

$$+\left[-\frac{\partial^4}{\partial s^4}-\frac{pa}{K}\frac{\partial^2}{\partial s^2}-(\frac{D}{Ka^2}+\frac{p}{aK})\right]V_n=0 \qquad (19b)$$

Αἱ ἐξισώσεις (19a, b) ἀποτελοῦν ὁμογενὲς σύστημα διαφορικῶν ἐξισώσεων. Πρόκειται περὶ ἑνὸς προβλήματος ἰδιοτιμῶν μὲ περιοδικὰς συνοριακὰς συνθήκας ($V_n(0)=V_n(2\pi a)$, $V_s(0)=V_s(2\pi a)$, κλπ.).

Ἡ λύσις τοῦ συστήματος θὰ εἶναι περιοδικὴ μὲ περίοδον $T=2\pi a$ καὶ ὡς ἐκ τούτου δύναται νὰ δοθῇ ὑπὸ μορφὴν σειρῶν Fourier:

$$V_n=\sum_{n=o}^{\infty}(a_n\cos\frac{n}{a}s+b_n\sin\frac{n}{a}s)$$

$$b_o=d_o=0 \qquad (20)$$

$$V_s=\sum_{n=o}^{\infty}(c_n\cos\frac{n}{a}s+d_n\sin\frac{n}{a}s)$$

Δι' ἀντικαταστάσεως τῶν σχέσεων (20) εἰς τὴν σχέσιν (19a) λαμβάνομεν:

$$\sum_{n=o}^{\infty}\left\{\left[-(D+\frac{K}{a^2})c_n\frac{n^2}{a^2}-\frac{K}{a}b_n\frac{n^3}{a^3}-\frac{D}{a}b_n\frac{n}{a}\right]\cos\frac{n}{a}s+\right.$$

$$\left.+\left[-(D+\frac{K}{a^2})d_n\frac{n^2}{a^2}+\frac{K}{a}a_n\frac{n^3}{a^3}+\frac{D}{a}a_n\frac{n}{a}\right]\sin\frac{n}{a}s\right\}=0 \qquad (21)$$

Ἐπειδὴ αἱ ἀνωτέρω σχέσεις ἰσχύουν δι' ὅλας τὰς τιμὰς τοῦ s, ἕπεται ὅτι οἱ συντελεσταὶ τῶν $\cos\frac{n}{a}s$ καὶ $\sin\frac{n}{a}s$ ($n=0,1,2,...$) πρέπει νὰ μηδενίζωνται καὶ ὡς συνέπειαν τούτου λαμβάνομεν τὰς ἀκολούθους δύο ἐξισώσεις ὡς πρὸς a_n, b_n, c_n καὶ d_n ($n=0,1,2,...$).

$$(\frac{Kn^3}{a^4}+\frac{Dn}{a^2})b_n+(D+\frac{K}{a^2})\frac{n^2}{a^2}c=0 \qquad (22a)$$

$$(\frac{Kn^3}{a^4}+\frac{Dn}{a^2})a_n-(D+\frac{K}{a^2})\frac{n^2}{a^2}d_n=0 \qquad 22b)$$

Κατ' ἀνάλογον τρόπον, δι' ἀντικαταστάσεως τῶν V_n, V_s ἐκ τῶν σχέσεων (20) εἰς τὴν σχέσιν (19b) προκύπτουν δύο ἀκόμη ἐξισώσεις, αἱ ὁποῖαι διατασσόμεναι ὡς πρὸς a_n, b_n, c_n καὶ d_n ($n=0,1,2,...$) ἔχουν ὡς ἑξῆς:

$$(-\frac{n^4}{a^4}+\frac{pn^2}{Ka}-\frac{D}{Ka^2}-\frac{p}{Ka})b_n-(\frac{n^3}{a^4}+\frac{Dn}{Ka^2})c_n=0 \qquad (22c)$$

$$(-\frac{n^4}{a^4}+\frac{pn^2}{Ka}-\frac{D}{Ka^2}-\frac{p}{Ka})a_n+(\frac{n^3}{a^4}+\frac{Dn}{Ka^2})d_n=0 \qquad (22d)$$

Αἱ ἐξισώσεις (22a, b, c, d) ἀποτελοῦν σύστημα τεσσάρων ἐξισώσεων διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῶν a_n, b_n, c_n καὶ d_n. Παρατηροῦμεν ὅτι δύνανται νὰ λυθοῦν κατ' ἀνεξάρτητα ζεύγη, οὕτως ὥστε αἱ (22a) καὶ (22c) νὰ δώσουν τὰς b_n καὶ c_n καὶ αἱ (22b) καὶ (22d) νὰ δώσουν τὰς a_n, d_n.

Ἐξετάζομεν τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (22a, c). Ἐπειδὴ τοῦτο εἶναι ὁμογενές, διὰ νὰ ὑπάρχῃ λύσις διάφορος τῆς μηδενικῆς, θὰ πρέπει ἡ ὁρίζουσα τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων νὰ ἰσοῦται πρὸς μηδέν, ἤτοι:

$$\begin{vmatrix} \frac{Kn^3}{a^4}+\frac{Dn}{a^2} & \frac{Dn^2}{a^2}+\frac{Kn^2}{a^4} \\ -\frac{n^4}{a^4}+\frac{pn^2}{Ka}-\frac{D}{Ka^2}-\frac{p}{Ka} & -(\frac{n^3}{a^4}+\frac{Dn}{Ka^2}) \end{vmatrix}=0 \qquad (23)$$

Ἡ σχέσις (23) δίδει τὴν ἐξίσωσιν, ἐκ τῆς ὁποίας θὰ προκύψουν αἱ κρίσιμοι τιμαὶ τοῦ φορτίου p. Ἡ ὁρίζουσα, ἡ ὁποία προκύπτει ἐκ τῶν σχέσεων (22b, d) δὲν ἀπαιτεῖται νὰ ἐξετασθῇ διότι εἶναι προφανές, ὅτι καταλήγει εἰς τὴν αὐτὴν ἐξίσωσιν. Δι' ἀναπτύξεως τῆς ὁριζούσης (23) καὶ μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν ὡρισμένων ἁπλοποιητικῶν πράξεων λαμβάνομεν:

$$-\frac{n^2(n^2-1)}{a^3}\left\{\frac{D}{K}+\frac{1}{a^2}\right\}p=-\frac{n^2D}{a^6}(n^2-1)^2 \qquad (24)$$

ἐκ τῆς ὁποίας διὰ $n\neq 0$, 1 προκύπτει:

$$p=(n^2-1)\frac{DKa^2}{Da^2+K}\frac{1}{a^3}$$

ἤτοι:

$$p_{cr}=(n^2-1)\frac{K}{1+\frac{K}{a^2D}}\frac{1}{a^3} \qquad (25)$$

Τὸ p_{cr} ἐκφράζει τὸ κρίσιμον φορτίον λυγισμοῦ*, τὸ ὁποῖον ταυτίζεται μὲ τὸ προκῦπτον ἐξ ἄλλων κλασσικῶν μεθόδων.

Κατὰ τὴν ἐξαγωγὴν τῆς σχέσεως (25) ἐξῃρέθησαν αἱ τιμαὶ $n=0,1$. Θὰ δείξωμεν ὅτι διὰ τὰς τιμὰς αὐτὰς οἱ ἀντίστοιχοι ὅροι τῶν σχέσεων (20) ἐκφράζουν κίνησιν τοῦ κελύφους ὡς στερεοῦ σώματος καὶ συνεπῶς δὲν ἔχουν ἐπιρροὴν ἐπὶ τοῦ λυγισμοῦ.

Διὰ $n=1$ αἱ σχέσεις (22a, b, c, d) γίνονται:

$$\begin{aligned} b_1+c_1&=0\\ a_1-d_1&=0\\ b_1+c_1&=0\\ a_1-d_1&=0 \end{aligned} \qquad (26)$$

ἐκ τῶν ὁποίων προκύπτει $c_1=-b_1$ καὶ $d_1=a_1$. Δι' ἀντικαταστάσεως τῶν τιμῶν αὐτῶν εἰς τὰς σχέσεις (20) λαμβάνομεν:

$$V_n=a_1\cos\varphi+b_1\sin\varphi$$

$$V_s=-b_1\cos\varphi+a_1\sin\varphi$$

Ἡ συνισταμένη ταχύτης $\overline{V}$ εἶναι (βλ. Σχ. 3):

$$\overline{V}=V_n\overline{e}_n+V_s\overline{e}_s$$

$$=(a_1\cos\varphi+b_1\sin\varphi)\overline{e}_n+(-b_1\cos\varphi+a_1\sin\varphi)\overline{e}_s$$

$$=a_1(\cos\varphi\overline{e}_n+\sin\varphi\overline{e}_s)+b_1(\sin\varphi\overline{e}_n-\cos\varphi\overline{e}_s)$$

ἢ ἀναφερόμενοι εἰς τὸ Σχῆμα 3 λαμβάνομεν:

$$\overline{V}=-(a_1\overline{j}+b_1\overline{k})=\text{αὐθαίρετον σταθερὸν διάνυσμα} \qquad (27)$$

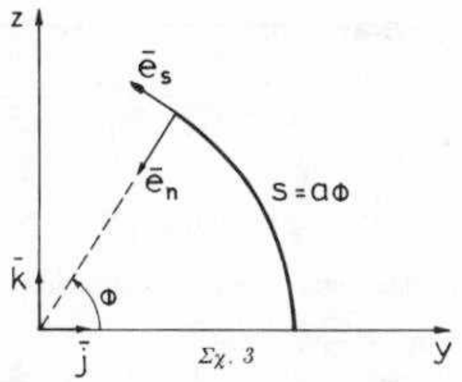
Ἡ σχέσις (27) ἐκφράζει ὅτι ὅλα τὰ σημεῖα τῆς μέσης ἐπιφανείας τοῦ κελύφους ἔχουν τὴν αὐτὴν σταθερὰν ταχύτητα, ἤτοι ἐκφράζει κίνησιν στερεοῦ σώματος.

Διὰ $n=0$, αἱ σχέσεις (22a, b, c, d) γίνονται:

$$0\cdot c_o=0,\ 0\cdot a_o=0,\ 0\cdot c_o=0,\ (\frac{D}{Ka^2}+\frac{p}{Ka})a_o=0$$

Ἐκ τούτων συμπεραίνομεν ὅτι $a_o=0$ καὶ $c_o=$ αὐθαίρετος

(*) Ἡ διὰ $n=2$ προκύπτουσα ἐλαχίστη τιμὴ τοῦ P_{cr} ἀποτελεῖ ἐν τῇ πράξει τὸ πραγματικὸν φορτίον λυγισμοῦ.

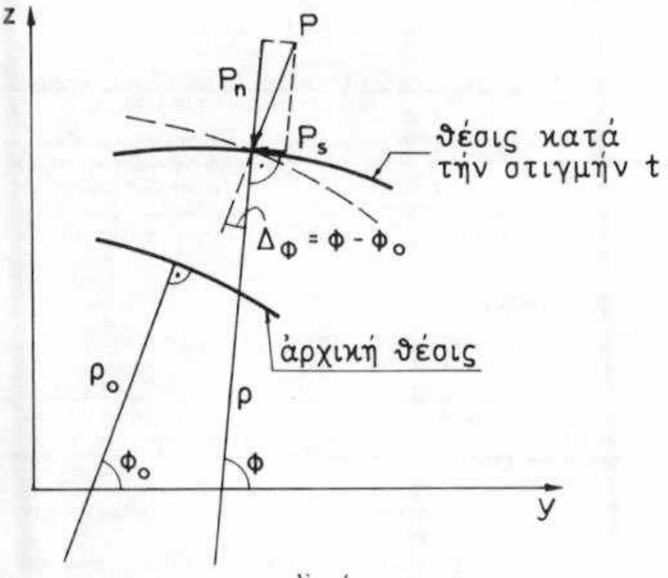


Σχ. 3

σταθερά. Ὅθεν V_s = σταθερὰ δι' ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ κελύφους. Ἑπομένως πρόκειται περὶ κινήσεως στερεοῦ σώματος.

5. Λυγισμὸς τοῦ κυλινδρικοῦ κελύφους διὰ τὴν φόρτισιν τῆς περιπτώσεως (β)

Εἰς τὴν παροῦσαν περίπτωσιν ἡ ὁμοιόμορφος ἐξωτερικὴ φόρτισις διατηρεῖ τὴν ἀρχικήν της κατεύθυνσιν πρὸ καὶ μετὰ τὴν παραμόρφωσιν τῆς μέσης ἐπιφανείας τοῦ κελύφους.



Σχ. 4

Ἀναφερόμενοι εἰς τὸ Σχ. 4 παρατηροῦμεν ὅτι:

Πρὸ τῆς παραμορφώσεως: $p_s = 0 \quad p_n = p$

Κατὰ τὴν στιγμὴν t:

$$p_s = p\sin\Delta\varphi \cong p\Delta\varphi$$
$$p_n = p\cos\Delta\varphi \cong p$$
$$\Delta p_n = 0$$
$$\Delta p_s = p\Delta\varphi$$

Ἄρα:

$$\dot{p}_n = 0 \quad , \quad \dot{p}_s = p\dot{\varphi} \tag{28}$$

Διὰ τοὺς αὐτοὺς ὡς εἰς τὴν περίπτωσιν φορτίσεως (α) λόγους λαμβάνομεν καὶ ἐνταῦθα ὡς ἀρχικὴν κατάστασιν τὴν μεμβρανικήν. Οὕτω δι' ἀντικαταστάσεως τῶν σχέσεων (14) καὶ (28) εἰς τὰς (9), (10) καὶ (11) λαμβάνομεν:

$$\frac{\partial \dot{N}_\varphi}{\partial s} - \frac{1}{a}\dot{Q}_\varphi + p\dot{\varphi} = 0 \tag{29a}$$

$$\frac{\partial \dot{Q}_\varphi}{\partial s} + \frac{1}{a}\dot{N}_\varphi - pa\frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial s} + \dot{e}_\varphi p = 0 \tag{29b}$$

$$\frac{\partial \dot{M}_\varphi}{\partial s} - Q_\varphi = 0 \tag{29c}$$

Δι' ἀπαλοιφῆς τῆς $\dot{Q}_\varphi$ ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐξισώσεων προκύπτουν:

$$\frac{\partial \dot{N}_\varphi}{\partial s} - \frac{1}{a}\frac{\partial \dot{M}_\varphi}{\partial s} + p\dot{\varphi} = 0 \tag{30a}$$

$$\frac{\partial^2 \dot{M}_\varphi}{\partial s^2} + \frac{1}{a}\dot{N}_\varphi - pa\frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial s} + \dot{e}_\varphi p = 0 \tag{30b}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ σχέσις (30b) εἶναι ἡ αὐτὴ πρὸς (17b) καὶ ἡ (30a) διαφέρει τῆς (17a) κατὰ τὸν ὅρον

$$p\dot{\varphi} = p\left(\frac{\partial V_n}{\partial s} + \frac{V_s}{a}\right).$$

Ὅθεν ἡ ἐξίσωσις (30a) συναρτήσει τῶν ταχυτήτων γράφεται:

$$\left(D + \frac{K}{a^2}\right)\frac{\partial^2 V_s}{\partial s^2} + \frac{K}{a}\frac{\partial^3 V_n}{\partial s^3} - \frac{D}{a}\frac{\partial V_n}{\partial s} + p\left(\frac{\partial V_n}{\partial s} + \frac{V_s}{a}\right) = 0$$

ἤ

$$\left(D + \frac{K}{a^2}\right)\frac{\partial^2 V_s}{\partial s^2} + p\frac{V_s}{a} + \frac{K}{a}\frac{\partial^3 V_n}{\partial s^3} + \left(p - \frac{D}{a}\right)\frac{\partial V_n}{\partial s} = 0$$

Ἑπομένως αἱ (30a, b) γράφονται:

$$\left[\left(D + \frac{K}{a^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{p}{a}\right]V_s + \left[\frac{K}{a}\frac{\partial^3}{\partial s^3} + \left(p - \frac{D}{a}\right)\frac{\partial}{\partial s}\right]V_n = 0 \tag{31a}$$

$$\left(-\frac{1}{a}\frac{\partial^3}{\partial s^3} + \frac{D}{aK}\frac{\partial}{\partial s}\right)V_s + \left[-\frac{\partial^4}{\partial s^4} - \frac{pa}{K}\frac{\partial^2}{\partial s^2} - \left(\frac{D}{Ka^2} + \frac{p}{aK}\right)\right]V_n = 0 \tag{31b}$$

Ἀναζητεῖται πάλιν καὶ εἰς τὴν παροῦσαν περίπτωσιν λύσις τῆς μορφῆς (20), ὁπότε δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (31a) λαμβάνομεν:

$$\sum_{n=o}^{\infty}\left\{\left[-\left(D + \frac{K}{a^2}\right)c_n\frac{n^2}{a^2} + \frac{p}{a}c_n - \frac{K}{a}b_n\frac{n^3}{a^3} + \left(p - \frac{D}{a}\right)b_n\frac{n}{a}\right]\cos\frac{n}{a}s + \left[-\left(D + \frac{K}{a^2}\right)d_n\frac{n^2}{a^2} + \frac{p}{a}d_n + \frac{K}{a}a_n\frac{n^3}{a^3} - \left(p - \frac{D}{a}\right)a_n\frac{n}{a}\right]\sin\frac{n}{a}s\right\} = 0$$

ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτουν αἱ ἐξισώσεις (n = 0, 1, 2,...).

$$\left[\left(p - \frac{D}{a}\right)\frac{n}{a} - \frac{Kn^3}{a^4}\right]b_n + \left[\frac{p}{a} - \left(D + \frac{K}{a^2}\right)\frac{n^2}{a^2}\right]c_n = 0 \tag{32a}$$

$$-\left[\left(p - \frac{D}{a}\right)\frac{n}{a} - \frac{Kn^3}{a^4}\right]a_n + \left[\frac{p}{a} - \left(D + \frac{K}{a^2}\right)\frac{n^2}{a^2}\right]d_n = 0 \tag{32b}$$

Ἐπίσης δι' ἀντικαταστάσεως τῶν ἐξισώσεων (20) εἰς τὴν (31b) λαμβάνομεν τὰς ἐξισώσεις (22c) καὶ (22d), τὰς ὁποίας ἐπαναγράφομεν ἐνταῦθα:

$$\left(-\frac{n^4}{a^4} + \frac{pn^2}{Ka} - \frac{D}{Ka^2} - \frac{p}{Ka}\right)b_n - \left(\frac{n^3}{a^4} + \frac{Dn}{Ka^2}\right)c_n = 0 \tag{32c}$$

$$\left(-\frac{n^4}{a^4}+\frac{pn^2}{Ka}-\frac{D}{Ka^2}-\frac{p}{Ka}\right)a_n+\left(\frac{n^3}{a^4}+\frac{Dn}{Ka^2}\right)d_n=0 \qquad (32d)$$

Διὰ νὰ ἔχῃ τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (32a, b, c, d) λύσιν διάφορον τῆς μηδενικῆς θὰ πρέπει

$$\begin{vmatrix} \frac{Kn^3}{a^4}+\frac{Dn}{a^2}-\frac{pn}{a} & \frac{Dn^2}{a^2}+\frac{Kn^2}{a^4}-\frac{p}{a} \\ -\frac{n^4}{a^4}+\frac{pn^2}{Ka}-\frac{D}{Ka^2}-\frac{p}{Ka} & -\left(\frac{n^3}{a^4}+\frac{Dn}{Ka^2}\right) \end{vmatrix}=0 \qquad (33)$$

ἢ

$$\begin{vmatrix} \frac{Kn^3}{a^4}+\frac{Dn}{a^2} & \frac{Dn^2}{a^2}+\frac{Kn^2}{a^4} \\ -\frac{n^4}{a^4}+\frac{pn^2}{Ka}-\frac{D}{Ka^2}-\frac{p}{Ka} & -\left(\frac{n^3}{a^4}+\frac{Dn}{Ka^2}\right) \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} -\frac{pn}{a} & -\frac{p}{a} \\ -\frac{n^4}{a^4}+\frac{pn^2}{Ka}-\frac{D}{Ka^2}-\frac{p}{Ka} & -\left(\frac{n^3}{a^4}+\frac{Dn}{Ka^2}\right) \end{vmatrix}=0$$

Ἡ ὁρίζουσα ἐγράφη ὡς ἄθροισμα δύο ὁριζουσῶν πρὸς ἁπλοποίησιν τῶν ἀλγεβρικῶν πράξεων. Διακρίνομεν ὅτι ἡ πρώτη ὁρίζουσα ταυτίζεται πρὸς τὴν (23). Συνεπῶς διὰ χρησιμοποιήσεως τῆς σχέσεως (24) λαμβάνομεν:

$$\underbrace{-\frac{n^2(n^2-1)}{a^3}\left\{\frac{D}{K}+\frac{1}{a^2}\right\}p+\frac{n^2D}{a^6}(n^2-1)^2}_{\text{πρώτη ὁρίζουσα}}+$$

$$\underbrace{\frac{Dn^2}{Ka^3}p+\frac{p^2n^2}{Ka^2}-\frac{pD}{Ka^3}-\frac{p^2}{Ka^2}}_{\text{δευτέρα ὁρίζουσα}}=0$$

ἢ

$$(n^2-1)\frac{1}{Ka^2}p^2+\left\{-\frac{n^2(n^2-1)}{a^3}\left(\frac{D}{K}+\frac{1}{a^2}\right)+(n^2-1)\frac{D}{Ka^3}\right\}p+$$

$$\frac{n^2D}{a^6}(n^2-1)^2=0$$

Διὰ $n \neq 0,1$ προκύπτει:

$$p^2-\left\{(n^2-1)\frac{D}{a}+\frac{n^2K}{a^3}\right\}p+(n^2-1)D\frac{n^2K}{a^4}=0 \qquad (34)$$

ἐκ τῆς ὁποίας

$$p=\frac{1}{2}\left\{(n^2-1)\frac{D}{a}+\frac{n^2K}{a^3}\right\}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left\{(n^2-1)\frac{D}{a}+\frac{n^2K}{a^3}\right\}^2-4(n^2-1)\frac{D}{a}\frac{n^2K}{a^3}}$$

ἢ

$$p=\frac{1}{2}\left\{(n^2-1)\frac{D}{a}+\frac{n^2K}{a^3}\right\}\pm\frac{1}{2}\left\{(n^2-1)\frac{D}{a}-\frac{n^2K}{a^3}\right\}$$

Συνεπῶς αἱ κρίσιμοι τιμαὶ τοῦ φορτίου p θὰ εἶναι:

$$p_{cr}^{(1)}=\frac{n^2K}{a^3} \qquad (35a)$$

$$(n = 2, 3, \ldots)$$

$$p_{cr}^{(2)}=(n^2-1)\frac{D}{a} \qquad (35b)$$

Τὸ $p_{cr}^{(1)}$ ταυτίζεται μὲ τὸ φορτίον λυγισμοῦ τὸ προκῦπτον ἐξ ἄλλων κλασσικῶν μεθόδων.

Παρατηροῦμεν ὅτι:

$$p_{cr}^{(2)}/p_{cr}^{(1)}=\frac{n^2-1}{n^2}\frac{EA}{a}\frac{a^3}{EI}=\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\frac{a^2}{h^2}12$$

Συνεπῶς διὰ $n = 2, 3, \ldots\infty$

$$p_{cr}^{(2)}/p_{cr}^{(1)}=9\left(\frac{a}{h}\right)^2 \div 12\left(\frac{a}{h}\right)^2 \gg 1$$

Εἶναι ἄρα φανερὸν ὅτι διὰ τὴν αὐτὴν τιμὴν τοῦ n τὸ φορτίον λυγισμοῦ (35a) εἶναι πάντοτε μικρότερον τοῦ (35b).

Καὶ εἰς τὴν προκειμένην περίπτωσιν ἀποδεικνύεται κατ' ἐντελῶς ὅμοιον τρόπον πρὸς τὸν προηγούμενον, ὅτι αἱ τιμαὶ n = 0, 1, αἱ ὁποῖαι δίδουν τοὺς δύο πρώτους ὅρους τῶν σχέσεων (20), ἐκφράζουν κίνησιν τοῦ κελύφους ὡς στερεοῦ σώματος καὶ συνεπῶς δὲν ἐπηρεάζουν τὸ φαινόμενον τοῦ λυγισμοῦ.

Βιβλιογραφία

1. *S. Timoshenko-J. Gere* "Theory of Elastic Stability", Int. St. Ed., McGraw-Hill, 1961.

2. *J.R. Lehner - S. C. Batterman* "Non linear static and dynamic deformations of shells of revolution", International Journal of Non Linear Mechanics, Vol. 9, pp. 501 - 519, Pergamon Press 1974.

3. *S.C. Batterman:* "Load deformation behavio- of shells of revolution", Proc. ASCE, Journal of Eng. Mechanics Div. 90, EM6, 1 - 19, 1964.

4. *D.O. Brush - B. O. Almroth:* "Buckling of Bars, Plates and Shells", McGraw-Hill, 1975.

5. *W. Flügge,* "Stresses in Shells", Springer Verlag, third printing, 1966.

6. *H. Ziegler:* "Principles of Structural Stability", Blaisdell Publishing Co, Waltham, Mass., 1968.

7. *K. Γεωργικόπουλου:* «Διανυσματικὸς Λογισμός», Ἀθῆναι 1951.

Application of the rate equotions to the buckling problem of the circular cylindrical shell.

By Dr. J. T. Katsikadelis

Summary

In this paper the rate equations are used to develop a method to solve buckling problems of shells. This method is applied to determine the buck ing load of a circular cylindrical shell under uniform external pressure. The rate equations in terms of the stress resultants are derived directly from the general equilibrium equations of the circular cylindrical shell. The aforemetioned equations are transformed into a system of two linear homogeneous differential equations in the components of velocity with peiodic boundary conditions.

Two loading cases are investigated:

a. The uniform external load remains normal to the deformed middle surface during buckling.

b. The uniform external load retains its initial direction during buckling.

For each loading case the resulting eigenvalue problem is solved using Fourier series expansions for the components of velocity. The buckling loads for each loading case are determined from the eigenvalues of the corresponding eigenvalue problem.